BIBLIOTHECAE
ELECTORALIS
MONACENSIS.

Ch. Wink. del.
Söckler sc. 1779.

Phil. 2718. b.

<36622204820012

<36622204820012

Bayer. Staatsbibliothek

Math. P. 435

Mathesis. Algebra generalis 232.

R

Phil. 2718. b

Joh. Georg Prändel

öffentlichen Lehrers der Physik und Mathematik auf dem
churfürstl. Lyceum zu Amberg

Algebra

in's Kurze gefaßt

und

mit möglichster Deutlichkeit

zum

Selbstunterrichte vorgetragen.

München
bey Joseph Lentner 1800.

Bayerische
Staatsbibliothek
München

Vorrede.

Die Gründe, welche mich veranlaßt hatten, einen Auszug aus meiner größern Arithmetik zu liefern, bestättigten sich vollkommen; und man äußerte auf's Neue sowohl in der Ferne als in der Nähe den lauten Wunsch, auch meine Algebra in dieser verjüngten Form zu erblicken. — Ich that es, wählte einen andern Zuschnitt des Vortrages, der Ordnung und der übrigen Verfahrungsart, tischte durchgehends neue Probleme auf, legte bey jeder Rubrik ähnliche Aufgaben zur Uebung vor, und fügte am Schluß des Werkchens die Resultate ihrer Auflösungen bey. Auch handelte ich hierin einige Artikel mit ungleich größerer Kürze ab, ließ die minder wichtigen ganz weg, und bearbeitete im Gegentheil andere nützlichere Materien mit mehr Ausführlichkeit, als es selbst im größeren Werke geschehen ist.

Was

Was die weggelassenen Fächer betrifft, so sind es vorzüglich die Sexagesimalrechnung, die unreinen Gleichungen des dritten Grades, die Anwendung der Proportionen auf die Kettenregel, und die Lehre von der Kombination der Größen. Dafür wurde aber die Theorie der Würden und der Logarithmen so deutlich und vollständig abgehandelt, als es nur der Begriff eines Auszuges erlaubte; weil bekanntlich diese beyden Artikel auf die Trigonometrie und höhere Analyse einen ungleich größern Einfluß als jene haben.

Hier ist auch der Ort, mich gegen eine harte Beschuldigung in der Jenaischen Litteraturzeitung zu vertheidigen. Es beliebte den Herren Verfassern dieser Blätter in der Recension meiner größern Algebra aus dem Satze, wo ich sagte: 8 Ellen verhalten sich zu ihrem Werthe 44 fl., wie 3 Ellen zu ihrem Werthe, den unbedingten Schluß

zu ziehen, ich habe keinen deutlichen Begriff vom geometrischen Verhältniß. Mit dem kältesten Blute zeige ich aber entgegen, daß **erstens** diese Stellung der Proportionsglieder nichts weniger als falsch sey, und daß ich **zweytens** guten Grund hatte, gerade diese Stellung und keine andere zu wählen. — Daß diese Stellung nicht falsch sey, weiß jeder Anfänger, der mit den achterley Versetzungen der vier Proportionsglieder bekannt ist. Die ursprüngliche Stellung, welche Herr Recensent etwa erwartet haben mag, müßte zwar immerhin diese seyn: **8 Ellen verhalten sich zu 3 Ellen, wie der Werth von 8 Ellen (nämlich 44 fl.) zu den Werth von 3 Ellen.** Aber so bald man die zwey mittleren Glieder vertauscht, welches bekanntlich allemal verstattet ist, und die Proportion nicht im geringsten störet, so entsteht für Herrn Recensenten der Stein des Anstoßes. Aber warum

wähl-

wählte ich gerade diese und keine andere Stellung? Der wichtige Beweggrund ist der, damit der Anfänger beym ersten Blick überzeugt werde; daß die Regel Detri (denn bey dieser Gelegenheit geschah es eben) nichts anders sey als eine Proportion, wo das vierte unbekannte Glied weggelassen ist. Oder findet man nicht bey vielen guten Mathematikern die Regel Detri so angeschrieben: 8 Ellen : 44 fl. = 3 Ellen : x fl.? Demungeachtet suchte ich im gegenwärtigen Auszuge auch diesem Vorwurfe auszuweichen; damit die gelehrte Welt es mit Augen sehen könne, wie gerne ich mich belehren, und zurechtweisen lasse.

München den 30sten Oktober 1799.

Der Verfasser.

Plan des Werkchens.

§. 1. Seite

Vorbegriffe von Algebra überhaupt, und von ihren Zeichen 1.

§. 2.

Von den entgegengesetzten Zeichen . . . . . . 6.

§. 3.

Von Ordnung und Abkürzung mehrgliederichter Größe 9.

§. 4.

Von den Rechnungsarten der Algebra in ganzen und ungebrochnen Größen . . . . 11.

§. 5.

Von der Addition . . . . 13.

§. 6.

Von der Subtraktion . . . . 15.

§. 7.

Von der Multiplikation . . . . 18.

§. 8.

Von der Division . . . . 22.

(§. 5.–8.: in ungebrochnen Größen.)

§. 9.

Von den Brüchen in der Algebra überhaupt . . . . 27.

§. 10.

Von Verkleinerung algebraischer Brüche . . . . . . 28.

§. 11.

Von Ausdrückung der algebraischen Brüche in kleinern Unterabtheilungsbenennungen . . . . 39.

§. 12.

Von Addition . . . . 32.

§. 13.

Von Subtraktion . . . . 34.

§. 14.

Von Multiplikation . . . . 36.

§. 15.

Von Division . . . . 37.

(§. 12.–15.: algebraischer Brüche.)

§. 16.

Von Behandluug algebraischer Brüche durch unendliche Reihen , ... 39.

§. 17.

§. 17. Seite.
Von den Gleichungen und ihrer Behandlung . . . . 41.
§. 18.
Vorläufige Proportionslehre. . . . . 51.
§. 19.
Von der Art und Weise, wie algebraische Probleme in Gleichungen zu bringen sind . . . . 71.
§. 20.
Von allgemeiner Auflösung algebraischer Probleme . 79.
§. 21.
Von der Art und Weise, wie mehrere unbekannte Größen eines Problems durch Gleichungen gefunden werden 91.
§. 22.
Von unbestimmten Problemen . . . . 101.
§. 23.
Würdenlehre . . . . 107.
§. 24.
Von den Decimalen . . . . 118.
§. 25.
Von den Logarithmen . . . . 128.
§. 26.
Von Erhebung mehrgliederichter Größen zu verschiedenen Würden, und von Ausziehung verschiedener Wurzeln 153.
§. 27.
Von Ausziehung der Quadratwurzel aus Zahlen . . 161.
§. 28.
Von unreinen quadratischen Gleichungen . . . . . 172.
§. 29.
Von Ausziehung der Kubikwurzel . . . . 177.
§. 30.
Fortsetzung der Lehre von geometrischen Proportionen 193.
§. 31.
Von den Reihen oder Progreßionen . . . . 206.

Algebra.

§. 1.

Vorbegriffe von der Algebra überhaupt, und von ihren Zeichen.

1.

Es giebt im menschlichen Leben eine Menge Rechnungsfälle, deren Auflösung zwar an sich selbst nicht unmöglich ist; wozu aber die gemeine Arithmetik keine Regeln in Bereitschaft hat. — Als Beyspiele will ich aus unzähligen Aufgaben nur zwey oder drey anführen.

I.

Ein Fuhrmann ladet 17 Eimer Mosler Wein und 28 Eimer Würzburger. Die Bezahlung war 1038 fl. Ein andermal ladet er beym nämlichen Preise 14 Eimer Mosler und 31 Eimer Würzburger. Die Bezahlung war 966. Wie theuer ist jede Weinsorte?

II.

Ein Pferdehandel gieng so vor sich: Man foderte für jedes Jahr des Pferdes so viele Laubthaler als es Jahre alt war. Der Käufer brach von jedem Jahre 3 fl. ab, und zahlte 299 fl. 45 kr.; wie alt war das Pferd?

III.

Irgendwo wurde ein Keller gegraben, mit dem Akkord, daß für den ersten Schuh in die Tiefe 1 fl. 35 kr. und für jeden Schuh nachher um 45 kr. mehr bezahlt werden mußte. Der Betrag war am Ende 1287 fl. 15 kr.; wie tief ist der Keller?

IV.

Jemand hat ein Kapital zu 4 Prozent aufliegen. Er braucht aber zur Bestreitung seiner Ausgaben jährlich 1200 fl. Weil nun das Interesse so viel nicht abwirft, so ist er gezwungen, daß Uebrige vom Kapital zuzusetzen. Nach 16 Jahren ist das Kapital rein aufgezehrt. Wie groß war anfänglich sein Kapital, und was setzte er im ersten Jahre zu? *)

2. Die Wissenschaft nun, für dergleichen Rechnungsfälle, die außer der Sphäre der gemeinen Arithmetik liegen: Regeln ausfindig zu machen, und sie durch eine besonders kurze Zeichensprache auszudrücken, ist die Algebra.

3. Man könnte sie daher auch füglich allgemeine Arithmetik heißen; weil solche Regeln für alle nur möglichen Fälle ein und der nämlichen Art gehören.

4.

*) Dieses leztere Beyspiel ist in meinem größern Werke Seite 527 umständlich bearbeitet. Die erstern hingegen werde ich alle am gehörigen Orte zur Auflösung anweisen.

4. Die Zeichen womit die Algebra rechnet, und die Resultate (Formeln) zuletzt darein kleidet, sind von dreyerley Art: Zeichen des Ausdruckes, der Verbindung und der Abkürzung.

5. Zur ersten Art gehören größtentheils Buchstaben, die aus dem lateinischen, und zuweilen auch aus dem griechischen Alphabete entlehnt werden, weßwegen die Algebra manchmal schlechtweg **Buchstabenrechnung** heißt. — Die erstern Buchstaben a, b, c &c. nimmt man gerne zur Bezeichnung der bekannten, die letztern hingegen: x, y, z &c. zur Bezeichnung der unbekannten Größen. Auch Ziffer sind in der Algebra nicht ganz verworfen. — Diese Zeichen haben das Eigne an sich, daß sie weit allgemeiner als die Ziffer sind. Es ist zwar ein Ziffer immerhin im Stande, alles das als Einheiten vorzustellen, was so viele gleichartige Dinge in sich enthält: z. B. Ein Siebner kann sieben Gulden, sieben Menschen, sieben Ellen u. s. f. bezeichnen; aber ein Buchstabe ist neben diesem noch obendrein vermögend, jede gedenkbare Zahl der Gulden, Menschen u. s. f. zu bezeichnen, wodurch freylich die Bezeichnung sehr allgemein werden muß.

6. Unter die zwote Art der Zeichen gehören die Charaktere: (+), (—), (×), (.), (:) und (=), welche schon in der Arithmetik vorkommen, und also ihre Bedeutung vorausgesetzt werden darf. Es stellt demnach

der Ausdruck: $a+f$ zum Beyspiel, auch hier eine Addition, $b-c$ eine Subtraktion, $b\times k$ oder $b.k$ eine Multiplikation und $d:m$ oder $\frac{d}{m}$ eine Division, einen Bruch vor. Endlich heißt $z=\phi$ hier ebenfalls, daß die beyden Größen einander gleich sind.

7. Zeichen der dritten Art sind meistentheils Zahlen, die entweder anzeigen, wie oft eine algebraisch ausgedrückte Größe summirendes Glied in einer Summe, oder wie oft dieselbe Faktor in einem Produkt sey. Thun sie das erste, so heißen sie in der Kunstsprache Koefficienten, und werden **vor** die Größe hingestellt. Z. B. $a+a+a$ wird in abgekürzter Form so geschrieben: $3a$, folglich ist $a+a+a=3a$. Soll hingegen eine Zahl anzeigen, wie oft irgend eine Größe Faktor sey, so setzt man sie in kleinerer Form **rechts darüber** hin, und giebt ihr den Name Exponent; z. B. $a\times a\times a=a^3$.

8. Solche mit Exponenten versehene Größen heißt man **Würden, Potenzen.** Man sagt dann: *a* der dritten, vierten (Würde) u. s. f. oder *a tertiae, quartae* &c. (dignitatis). Geometrischen Begriffen zufolge spricht man beym Exponenten 2 auch gerne Quadrat, so wie beym Exponenten 3 Kubus. Z. B. x^2 heißt x Quadrat, a^3 a Kubus.

9. Diese beyden Ausdrucksarten $3a$ und a^3, $5x$ und x^5 dürfen daher auf keine Weise verwechselt werden, denn ihr innerer Gehalt ist wesentlich verschieden. Setzen wir

wir a gelte 12, so ist 3a so viel als 3×12 oder $12 + 12 + 12 = 36$; a^3 hingegen $12 \times 12 \times 12 = 1728$. Im ersten Fall macht 3 mit a ein Produkt aus, daher das Wort coefficiens (mitausmachend). Im zweyten Fall setzt der Dreyer aus (exponit), daß das Ganze ein Produkt aus 3 gleichen Faktoren sey; daher das Wort Exponent.

10. Die Einheit wird weder als Koefficient noch als Exponent angeschrieben, sondern darunter verstanden; daher ist a oder x soviel als $1 a^1$ oder $1 x^1$, und wechselsweise.

11. Sind mehrere Größen in einer Reihe durch die Zeichen (+) oder (—) verbunden, so heißen diese Grössen Glieder, z. B. $5d - c^2 + 3x$, und eine auf diese Art zusammgesetzte Reihe wird von der Anzahl der Glieder zweygliedericht, dreygliedericht, überhaupt mehrgliedericht genennt.

12. Die Glieder sind gleichartig, wenn sie die nämlichen Buchstaben mit dem nämlichen Exponenten haben. Fehlt eines von beyden, oder beydes zugleich, so sind die Glieder ungleichartig. So werden in $8n - 3z + 5z^2$ alle Glieder ungleichartig genennt; in der Reihe hingegen $5a - 2a + 4f^3 - f^3$ finden sich zwey Paare gleichartiger Glieder vor.

§. 2.

§. 2.

Von den entgegengesetzten Größen.

1. Wenn zwo Größen die Beschaffenheit haben, daß sie sich entweder ganz oder zum Theil einander aufheben, so sagt man, daß sie sich entgegengesetzt sind.

2. Wenn man z. B. 10 Schritte von einem Standpunkte weggeht, und 10 solche Schritte in der nämlichen Richtung zurück thut, so ist es in Rücksicht der Entfernung eben so viel, als wenn man gar nie weiter gekommen wäre. Diese zwo Größen heben sich einander ganz auf.

3. Wenn jemand das Monat hindurch 40 fl. verdient, aber zugleich 35 fl. ausgiebt, so ist dessen reine Errungenschaft 5 fl.; denn 10 fl. bestehen aus den Theilen 35 und 5: der Theil 35 von der Einnahme hebt sich aber gegen die 35 fl. Ausgabe auf, und die 5 fl. bleiben noch.

4. Wenn der Aktivstand eines Besitzers 1400 fl. beträgt, der Paßivstand aber schon bis auf 1600 fl. angewachsen ist, so kann er zwar 1400 fl. heimbezahlen; denn dieser Theil der Schuld hebt sich gegen das Vermögen auf; aber es bleiben noch 200 fl. Schulden übrig. In diesen beyden letzten Fällen heben sich zwar die entgegengesetzten Größen nicht ganz, doch zum Theil einander auf.

5. Sol-

5. Solche entgegengesetzte Größen heißen nach der Sprache der Mathematik positiv und negativ, wovon sowohl die reine als angewandte Mathese voll ist.

6. Im Grunde liegt nichts daran, welche von den beyden entgegengesetzten Größen man anfänglich positiv nennt: ist aber einmal eine von selben als positiv angenommen, so muß die andere sogleich als negativ anerkannt werden. Ist das Vermögen als positiv erklärt, so sind die Schulden negativ; und umgekehrt, sind die Schulden positiv, so muß das Vermögen negativ seyn.

7. Nennt man z. B. das Fallen des Barometers positiv; so wird nothwendig das Steigen desselben als negativ angesehen.

8. Gemeiniglich wird, bey irgend einer Berechnung, von zwoen entgegengesetzten Größen jene als positiv angenommen, die dem Mathematiker zuerst aufstößt, oder auch, die größer als die andere ist. Die entgegengesetzte ist dann eben darum negativ.

9. Es ist wohl zu merken, daß der Ausdruck negativ im mathematischen Sinne mehr sagt, als nach dem Sprachgebrauche. Er zeigt gerade allemal das Gegentheil von dem an, was positiv heißt. Wenn geben als positiv angenommen wird, so ist nicht geben noch lange nicht

nega-

negativ, obwohl nach dem Sprachgebrauche negare petitum soviel als nicht geben heißt: sondern man muß das nämliche rauben statt geben, wenn man mathematisch negativ handeln will. Man sollte also eigentlich nicht negativ, sondern vielmehr oppositiv sagen.

10. Die positiven Größen werden durch das vorangesetzte Zeichen (+), und die negativen durch (—) kennbar gemacht. Denn diese Zeichen deuten in der Arithmetik ohnehin entgegengesetzte Rechnungsarten an, nämlich Addiren und Subtrahiren (hinzugeben und hinwegnehmen) und sind daher am schicklichsten, entgegengesetzte Beschaffenheiten oder Zustände der Größen auszudrücken.

11. Man liest, wie bekannt, beym Zeichen (+) *plus* oder auch und; beym Zeichen (—) hingegen *minus* oder weniger.

12. Wie wichtig für Anfänger deutliche Begriffe von entgegengesetzten Größen sind, wird in der Folge durch die ganze Algebra und übrige Mathematik nur zu sehr erwiesen werden.

§. 3.

§. 3.

Von Ordnung und Abkürzung mehrgliederichter Größen.

---

1. Steht eine positive Größe für sich ganz allein, oder bey mehrern am Anfange, welches letztere allemal, wenn es thunlich ist, geschehen soll, so wird das Zeichen der Positivität (+) weggelassen und darunter verstanden; außer man will in einigen Fällen es ausdrücklich anzeigen. Z. B. b oder 5m bedeuten so viel als +b oder +5m. Aus gleichem Grunde heißt auch 2c — m + 1 so viel als + 2c — m + 1.

2. Mehrgliederichte Größen werden gerne nach dem Alphabete geordnet, doch so, daß eine positive Größe, wenn es je füglich seyn kann, den Anfang macht. Zahlen ohne Buchstaben, wenn einige mit unterlaufen, mögen zu Ende gesetzt werden. — Die zwo Größenreihen 1) 7m — 3b + 3a — z + x, und 2) — a + 4c — 8 + d + x — 2p + b, erhalten folgende Ordnung:

1) 3a — 3b + 7m + x — z.

2) b — a + 4c — d — 2p + x — 8.

3. Hat ein und der nämliche Buchstab verschiedene Exponenten, so gehen die größern gerne voraus. Z. B. die Reihe $2a^5 + 6a^8 — 5a^7$ steht nach der Ordnung so

da:

da: $6a^8 - 5a^7 + 2a^5$. Jedoch sieht man bey Reihen von zusammengesetzten oder gebrochenen Gliedern, wie etwa in $ay + bx - dm^2$ oder $\frac{b}{x} + \frac{a}{z} - \frac{3y}{a}$ u. d. gl. nicht mehr so sehr auf die hier gegebenen Regeln für Anfänger, sondern ihre Ordnung wird vielmehr eines jeden Gutbefinden überlassen.

4. Solche Größenreihen, die aus positiven und negativen Gliedern gleicher Art zusammgesetzt sind, lassen sich allemal abkürzen; indem man das kleinere Glied von dem größern abzieht und dem Rest das Zeichen des mehrhaltigen Gliedes giebt. Z. B. $8a - 3a = 5a$, und $6x - 10x = -4x$. Der Grund dieses Verfahrens liegt darinn, daß sich das mehrhaltige Glied in zwey Größen zersetzen läßt, wovon eine so groß als die kleinere ist, folglich sich mit ihr aufhebt. Denn $8a = 5a + 3a$ und $-10x = -6x - 4x$. Setzt man nun in dem Ausdrucke $8a - 3a$ statt $8a$ dessen Theile, so entsteht $5a + 3a - 3a$, wo sich $+3a - 3a$ aufheben. Ein gleiches gilt auch vom obigen zweyten Ausdrucke $6x - 10x$.

5. Sind die beyderley Größen gleich groß, so verschwinden sie eben darum alle beyde. Setzen wir $3m - 3m + x = x$.

6. Auch solche Größenreihen, die aus mehrern positiven oder mehrern negativen Gliedern von einerley Art zusammengesetzt sind, lassen sich abkürzen; indem man sie wirk=

wirklich zusammenzählt, und der Summe das gemeinschaftliche Zeichen der Theile giebt, als: $7a + 3a = 10a$ und $4x - 2y - y = 4x - 3y$.

7. Sind mehrere positive und negative Glieder der nämlichen Art da, so addirt man erst die positiven Glieder für sich zusammen, behandelt dann auch die negativen Glieder so, und zieht sie am Ende erst von einander ab, z. B. $a + 5b - 3b + 2b - 7b + b = a + 8b - 10b = a - 2b$.

8. Aufgaben über diesen Abschnitt.

I. Man ordne folgende Größenreihen:

1) $-7q + 3z - 5d^5 + 12a + 2f - 18b^2$.

2) $3g^3 - a - 5g^2 + 19b + 5 - m + 7z^4 - d^2$.

3) $k^4 - 8b^2 + z^3 - z^2 + 3d - 7a + c^2$.

II. Man kürze folgende Ausdrücke ab, und ordne sie zugleich.

1) $4a - 3a + 7d^2 - 3d^2 + 5d + 9d + 7z - 4z$.

2) $3q - 7h - 4h + 2q - 9z^2 + 8z^2 - z - 2 - 3q$.

3) $-4m^3 + m^3 + 3d - 7d - x - 4 + x^2 - 5x$.

§. 4.

Von den Rechnungsarten der Algebra in ganzen und gebrochnen Größen überhaupt.

1. Da die Zeichen womit Größen ausgedrückt werden, die Wesenheit derselben nicht im Geringsten ändern können, man mag sie durch Ziffer oder durch Buchstaben bezeich=

bezeichnen, so giebt es in der Algebra eben so viele Rechnungsarten wie in der Arithmetik.

2. Die Wesenheit der Größen besteht bekanntlich darinn, daß sich selbe vermehren und vermindern lassen: daher Addition und Subtraktion, wie auch die untergeordneten Rechnungsarten Multiplikation und Division.

3. Die Erklärungen dieser vier Rechnungsarten dörfen also hier nur aus der Arithmetik kurz wiederholt werden. — Addiren heißt eine Größe finden, welche mehrern gegebnen Größen zusammengenommen gleich ist. — Die Subtraktion giebt den Unterschied zwischen zwoen Größen an. — Die Multiplikation setzt eine von zwo gegebnen Größen so oft, als die andere Einheiten enthält. — Die Division bestimmt endlich, wie oft eine von zwo Größen in der andern enthalten sey.

4. Unter ganzen oder ungebrochnen Größen versteht man in der Algebra solche, die der äußern Form nach keinen Bruch vorstellen. Es mögen einfache Buchstaben a, b u. d. gl. sich immerhin durch arithmetische Brüche $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{7}$ u. s. f. ausdrücken lassen, so verräth doch die äußere Form der Vorstellung keinen Bruch, und werden daher unter die ganzen Größen gerechnet. Folgende Ausdrücke aber: $\frac{a}{b}$, $\frac{c-x}{2y}$, $\frac{a}{7}$, $\frac{4}{x}$ u. d. gl. die das Gepräge einer Division oder eines Bruches an der Stirne tragen, heißen eben darum in der Algebra gebrochne Größen, sie mögen es in der That seyn oder nicht.

§. 5.

§. 5.

Von der Addition in ungebrochnen Größen.

1. In der Algebra werden bey der Addition selten oder gar nie mehr als zwo übereinander stehende Reihen vor die Hand genommen. Sind sie nicht schon geordnet und abgekürzt, so müssen sie dadurch, daß man den Gliedern die gehörige Stellung und den kürzesten Ausdruck giebt, zur Addition vorbereitet werden.

2. Jene Reihe, welche mehrere Buchstabenglieder verschiedner Art enthält, als die andere, soll zuerst angeschrieben werden, so das man da Lücken übrig läßt, wo die andere Reihe solche Glieder hat, wovon sich in der erstern keine vorfinden. Die andere Reihe schreibe man so darunter, daß die gleichartigen Glieder unter einander zu stehen kommen, und ziehe zur Absönderung der Summe, wie in der Arithmetik, eine Zwerchlinie.

3. Nun befolge man zwischen beyden Reihen die gegebnen Regeln der Abkürzung, welche sich kurz unter die drey Gesetze bringen lassen.

I. Gleichartige Glieder von einerley Zeichen werden zusammgezählt, und das herrschende Zeichen zur Summe herabgeschrieben.

II. Gleich-

II. Gleichartige Glieder von verschiedenen Zeichen werden von einander subtrahirt, und dem Reste das Zeichen des mehrhaltigen Gliedes gegeben.

III. Ungleichartige Glieder werden mit ihren Zeichen nach der Ordnung des Alphabets nebeneinander herabgesetzt.

4. Diese Operation selbst wird bequemer von der Linken zur Rechten verrichtet; weil es unsre europäische Schriftordnung so mit sich bringt. Ein gleiches gilt auch von der Subtraktion und Multiplikation.

5. Setzen wir, es wären als ein Beyspiel diese beyden Reihen zum Addiren gegeben:

1) $4c + d - 3f + 2m^2 + v^3 - 10x - y + 19z.$

2) $a + c - 7f + 5g + 3m^2 - 4v^3 + 10x + 7y^2 - 7z.$

Auflösung.

Es erhalten demnach die Glieder dieser Reihen folgende Stellung und Behandlung.

$$\begin{array}{l} 4c+d-3f+ \quad 2m^2+v^3-10x-y+19z \\ a+c \quad -7f+5g+3m^2-4v^3+10x-7y^2-7z \\ \hline \end{array}$$

Sum. $a+5c+d-10f+5g+5m^2-3v^3-7y^2-y+12z.$

6. Auf-

6. Aufgaben zur Uebung der Addition.

I.

Es sey eine Reihe:

$$8b - 3d^2 + 7h + k - 4n^3 - 9x + 13z - 1$$

und die andere:

$$-a + 8d^2 - 3h - m + 2n^3 - 17x - z.$$

II.

Oder die eine Reihe:

$$5c + f^3 - 3g^2 + 2g - 7m - 4y^3 - z + 15$$

und die andere:

$$b - 9d + 7f^3 - 5g^3 + m - y^2 + 3y^3 + z.$$

§. 6.

Von der Subtraktion in ungebrochnen Größen.

1. Eine Größe wird in der Algebra von einer andern schon dadurch abgezogen, wenn man nur das Zeichen des Subtrahends in das entgegengesetzte verändert. Wenn demnach von $+a$ das $+b$ abgezogen werden soll, so setzt man als Rest $a - b$; und umgekehrt, will man von $+a$ das $-b$ abziehen, so entsteht der Rest $a + b$.

Dieß läßt sich so erweisen. Ehe ich von der Größe $+a$ das $+b$ oder $-b$ abziehe, bereite ich sie dazu vor, indem

indem ich ihr den Nullwerth $+b-b$ anhänge, und sie also weder vermehre noch vermindere. Es ist daher $a+b-b$ so viel als a. Nehme ich nun von diesem vorbereiteten Ausdruck das $+b$ hinweg, so bleibt als Rest noch $a-b$; nimmt man aber statt dem Obigen das $-b$ hinweg, so bleibt $a+b$ übrig. Folglich bleibt allemal der Subtrahend mit dem verkehrten Zeichen beym Minuend stehen.

2. Oft ergiebt sich der Fall, daß man nach Veränderung des Zeichens den Ausdruck des Restes abkürzen kann. Z. B. Es soll von $5c$ die Größe $+2c$ abgezohen werden. Da nun hier der Rest $5c-2c$ ist, so wird nach der Abkürzung sehr natürlich $3c$ daraus.

3. Die allgemeinste Regel der Subtraktion in der Algebra, vorzüglich bey mehrgliederichten Größen, ist daher diese:

Man ordne die beyden Reihen, Minuend und Subtrahend so untereinander, wie oben bey der Addition. Verändere alle Zeichen des Subtrahends in die entgegengesetzten, und befolge die drey obigen Gesetze der Abkürzung.

4. Es seyen hier als Beyspiel die beyden Reihen aufgestellt.

Minuend.

$$4a-2b^2-9f+16m-7x-z+4.$$

Sub-

Subtrahend.

$3a - c^2 - 5f + 13m - 9x - z^7 - 5.$

Behandlung dieser beyden Reihen.

$$\begin{array}{l} 4a - 2b^2 \quad - 9f + 16m - 7x \quad - z + 4. \\ 3a \quad - c^2 - 5f + 13m - 9x - z^7 \quad - 5. \\ - \quad + \quad + \quad - \quad + \quad + \quad + \\ \hline \text{Rest } a - 2b^2 + c^2 - 4f + 3m + 2x + z^7 - z + 9. \end{array}$$

5. Da die Addition die Probe der Subtraktion giebt, so addiere man zum Rest den Subtrahend, so wird der Minuend hier in der Algebra ebenfalls wie in der Arithmetik erscheinen.

$$\begin{array}{l} a - 2b^2 + c^2 - 4f + 3m + 2x + z^7 - z + 9. \\ 3a \quad - c^2 - 5f + 13m - 9x - z^7 \quad - 5. \\ \hline 4a - 2b^2 \quad - 9f + 16m \pm 7x \quad - z + 4. \end{array}$$

6. Umgekehrt ist auch die Subtraktion die Probe der Addition. Wir sind nun also auch im Stande, die Probe von dem obigen Beyspiel der Addition zu machen, wenn wir von der Summe eine Reihe abziehen und die andere Reihe als Rest übrig bleiben lassen.

$$\begin{array}{l} a + 5c + d - 10f + 5g + 5m^2 - 3v^3 \quad - 7y^2 - y + 12z \\ a + c \quad - 7f + 5g + 3m^2 - 4v^3 + 10x - 7y^2 \quad - 7z \\ - - \quad + \quad - \quad - \quad + \quad - \quad + \quad + \\ \hline 4c + d - 3f \quad + 2m^2 + v^3 - 10x - y \quad + 19z. \end{array}$$

7. Aufgaben zur Uebung.

I.

$$10d - 4k^5 - 7n + r - v - y^2 + 2z$$
$$-7a - 2d - 3f^2 + 6h - k^5 + 4n - v + 5y^2 - 5.$$

II.

$$a^3 - 15b^2 + c + 4x^4 - 11y - 9z^3 - 1.$$
$$-a^3 + 4b^2 - d^2 - 9m^2 + 7x^4 - 2y + 9z^2 - 20.$$

§. 7.

Von der Multiplikation ungebrochner Größen.

1. Die Multiplikation einer Buchstabengröße durch die andere wird in der Algebra dadurch ausgedrückt, daß man die beyden Buchstaben nahe zusammenstellt. Der Ausdruck ab oder xy ist demnach so viel als $a \times b$ und $x \times y$.

2. In der Algebra ist es aber noch lange nicht genug, den Multiplikand so oft zu nehmen, als viele Einheiten der Multiplikator in sich enthält; sondern das Produkt richtet sich auch genau nach den positiven oder negativen Zustand des Multiplikators. Ist der Multiplikator positiv, so wird das Zeichen im Produkt gerade so angesetzt, wie es im Multiplikand steht; ist er negativ, so wird

das

das Zeichen des Multiplikands im Produkt verneint angeschrieben, das heißt, in das entgegengesetzte verwandelt. Es ist aber auch hier, wie in der Arithmetik, einerley, welchen von beyden Faktoren man als Multiplikator ansehen wolle. Daher die vier möglichen Fälle:

$$+a \times +b = +ab$$
$$-a \times +b = -ab$$
$$+a \times -b = -ab$$
$$-a \times -b = +ab.$$

3. Der Grund dieser Behandlung liegt deutlich in der Natur der entgegengesetzten Größen. Denn etwas positiv machen, heißt die Sache in seinem Zustande lassen; hingegen negativ oder eigentlich oppositiv machen, heißt das Gegentheil vom ursprünglichen Zustande herstellen.

4. Einer Beobachtung zufolge, kann man auch, wenn man etwa lieber will, diese kurze praktische Regel gelten lassen:

Gleiche Zeichen der Faktoren geben im Produkte **Plus**; ungleiche aber **Minus**.

5. Aber was ist mit den Koefficienten und Exponenten der Faktoren anzufangen? Antwort: Die Koefficienten werden allemal durcheinander multiplicirt, z. B. $2a \times 3m = 6am$; und die Exponenten des nämlichen Buchstabens addirt, als $x^2 \times x^3 = x^5$. Sind aber die Buchstaben in beyden Faktoren verschieden, so wer-

den selbe sammt ihren Exponenten zusammgestellt. Z. E. $m^4 \times y^2 = m^4 y^2$.

6. Beyde Regeln müssen erwiesen werden, und zwar zuerst die von den Koefficienten, daß nämlich $2a \times 3m = 6am$ sey. Man löse beyde Faktores in ihre ursprüngliche Bedeutung auf, so erhält man $(a + a) \times (m + m + m)$. Es müssen demnach alle m mit jedem a oder alle a mit jedem m multiplizirt werden, und man erhält in jedem Falle $am + am + am + am + am + am$, welche Reihe, wenn sie abgekürzt wird, die obige Größe $6am$ giebt.

7. Nun auch die Regel von den Exponenten, daß nämlich $x^2 \times x^3 = x^5$ sey. Man löse hier ebenfalls die Würden in Faktores auf, so ergiebt sich $xx \times xxx$, und ohne Multiplikationszeichen zusammgestellt $xxxxx$, welches nach der Abkürzung sich durch x^5 ausdrücken läßt.

8. Die vier Regeln der Multiplikation in Buchstaben sind nun kurz diese:

a) Die Buchstaben werden nahe zusammengerückt.
b) Die Koefficienten werden durch einander multiplizirt.
c) Die Exponenten des nämlichen Buchstaben werden addirt, und
d) gleiche Zeichen geben **Plus**, ungleiche **Minus**.

9. In

9. In folgenden einfachen Beyspiel kann das Vorgetragne noch mehr ersehen werden. Es soll erstens die Reihe $4d - 6f^2 - 3x^5 + z$ durch die Größe $7x^2$ multiplizirt werden. Die Behandlung ist diese:

$$\begin{array}{l} 4d - 6f^2 - 3x^5 + z. \\ 7x^2 \\ \hline 28dx^2 - 42f^2x^2 - 21x^7 + 7x^2z. \end{array}$$

Man multiplizire zweytens $9m^4 - 4v + 3y^2 + 4$ durch $-3vy$, so kömmt zum Vorschein:

$$\begin{array}{l} 9m^4 - 4v + 3y + 4 \\ -3vy \\ \hline -27m^4vy + 12v^2y - 9vy^2 - 12vy, \end{array}$$

oder in einer bessern Stellung:

$$12v^2y - 27m^4vy - 9vy^2 - 12vy.$$

10. Ist der Multiplikator eine mehrgliederichte Größe, so können die Partialprodukte eben so untereinander geschrieben werden, wie in der Zahlenrechnung: vorzüglich wenn sich in beyden Faktoren mehrere gemeinschaftliche Buchstaben befinden; weil man in solchen Fällen zuletzt gemeiniglich abkürzen kann. Ein Beyspiel hierüber!

$$\begin{array}{l} a^3 - 3a^2b + 3ab^2 + b^3. \\ 2a - 4b. \\ \hline 2a^4 - 6a^3b + 6a^2b^2 + 2ab^3. \\ \quad - 4a^3b + 12a^2b^2 - 12ab^3 - 4b^4. \\ \hline 2a^4 - 10a^3b + 18a^2b^2 - 10ab^3 - 4b^4. \end{array}$$

11. Sind aber die Buchstaben in den beyden Faktoren ganz verschiedenartig, so thut man am besten, wenn man das Produkt sogleich in einer Zeile hinschreibt. Z. B.

$$5a^3 - 3b + 7m^2 - x - 1.$$
$$3c^4 - 8d^2.$$
$$15a^3c^4 - 9bc^4 + 21c^4m^2 - 3c^4x - 3c^4 - 40a^3d^2 + 24bd^2 - 56d^2m^2 + 8d^2x + 8d^2.$$

12. Aufgaben zur Uebung.

I.

$$(5b^3 + 3m^4 - 6vy^3 + 2) \times 4m^2.$$

II.

$$(y^4 - 4y^3z - 5y^2z^2 + 2yz^3 - z^4) \times (3y^2 - z^2).$$

III.

$$(12a + 7b^2 - m^3 - 8) \times (6c^2 - 3z).$$

§. 8.

Von der Division ungebrochner Größen.

1. Daß hier die Regeln der Multiplikation, wenigst die ersten drey, im entgegengesetzten Sinne zu nehmen sind, wird, denke ich, jedermann einsehen; indem bekanntlich diese Rechnungsart selbst schon das Gegentheil von der andern ist.

2. Die

2. Die erste Regel hieß dort, daß der Buchstab des Multiplikators mit dem Buchstaben des Multiplikands zusammengestellt werden sollen: folglich muß hier bey der Division der Buchstab des Divisors vom Dividend weggenommen werden. Z. B. $ax : x = a$.

3. Die zweyte Regel lautete so: Der Koefficient des Multiplikands muß mit dem Koefficienten des Multiplikators multiplicirt werden: hier wird eben darum der Koefficient des Dividends durch den des Divisors dividirt. Es ist daher $8bg : 4b = 2g$.

4. Die dritte Regel sagt: Der Exponent des Multiplikators wird zum Exponenten des Multiplikands addirt, im Fall der Buchstab überall der nämliche ist; hier subtrahirt man den Exponenten des Divisors von dem des Dividends. So ist $10a^5 : 2a^3 = 5a^2$.

5. Da die Zeichen keine Größen sind, sondern nur die Beschaffenheiten derselben ausdrücken, so ist es natürlich, daß die obige Regel von den Zeichen hier keine Abänderung leiden darf. Es setzt also ein positiver Divisor alle Zeichen im Quotus so, wie sie im Dividend waren, und ein negativer Divisor thut das Gegentheil. Daher die abgezogne Regel: gleiche Zeichen geben Plus, und ungleiche Minus auch bey der Division Platz greift. Hier sind wieder die vier möglichen Fälle:

$+ab$;

$$+ab : +a = +b,$$
$$+ab : -a = -b,$$
$$-ab : +a = -b,$$
$$-ab : -a = +b.$$

6. Als Beyspiele sollen einige Proben der obigen Multiplikationen nach der Ordnung gemacht werden, damit die Anwendung dieser Regeln mehr in die Augen fällt.

I.

$$28dx^2 - 42f^2x^2 - 21x^7 + 7x^2z \;\Big|\; 4d - 6f^2 - 3x^5 + z.$$
$$(7x^2)\quad(7x^2)\quad(7x^2)\quad(7x^2)$$
$$\mp 28dx^2 \mp 42f^2x^2 \mp 21x^7 \;\; 7x^2z.$$
$$0 \qquad 0 \qquad 0 \qquad 0$$

II.

$$12v^2y - 27m^4vy - 9vy^2 - 12vy \;\Big|\; -4v + 9m^4 + 3y + 4.$$
$$(-3vy)\;(-3vy)\;(-3vy)\;(-3vy)$$ oder besser geordnet:
$$\pm 12v^2y \mp 27m^4vy \mp 9vy^2 \mp 12vy \qquad 9m^4 - 4v + 3y + 4.$$
$$0 \qquad 0 \qquad 0 \qquad 0$$

7. Ist der Divisor mehrgliedericht, so richten sich die Zeichen des Quotus nach dem ersten Gliede des Divisors; denn durch dieses Gliede wird die Größe des Quotus erforscht, folglich auch die Beschaffenheit desselben.

III.

$$2a^4 - 10a^3b + 18a^2b^2 - 10ab^3 - 4b^4 \quad \Big| \; a^3 - 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

$(2a - 4b)$

$2a^4 - 4a^3b$

$- \quad +$

$-6a^3b$

$(2a - 4b)$

$-6a^3b + 12a^2b^2$

$+ \quad -$

$+6a^2b^2$

$(2a - 4b)$

$+6a^2b^2 - 12ab^3$

$- \quad +$

$+2ab^3$

$(2a - 4b)$

$2ab^3 - 4b^4$

$- \quad +$

0

8. Noch muß angemerkt werden, daß es in der gemeinen Algebra selten oder gar nie einen Fall giebt, wo Divisionen vorgenommen werden, die nicht rein aufgehen; sondern daß man sie größtentheils durch Brüche ausdrückt. Es soll z. B. $a^2 + b^2$ durch $a - b$ dividirt werden

$$
\begin{array}{l|l}
a^2 + b^2 & a + b \\
(a - b) & \\
a^2 - ab & \\
- \quad + & \\
\hline
\quad ab & \\
\quad (a - b) & \\
\quad ab - b^2 & \\
\quad - \quad + & \\
\hline
\quad 2b^2 &
\end{array}
$$

so sieht man, daß am Ende etwas übrig bleibt. Es wird daher die ganze Division schlechtweg durch den Bruch $\frac{a^2 + b^2}{a - b}$ ausgedrückt.

9. Sollte es aber dem ungeachtet Fälle geben, wie es wirklich in der höhern Mathematik nichts seltnes ist, daß dergleichen Divisionen gemacht werden müssen, so kann die Behandlung nach der vorausgeschickten Lehre von algebraischen Brüchen §. 16. eingesehen werden.

10. Aufgaben zur Uebung:

I. $(a + ad^2 - 2ad - 3d^2x + 6dx - 3x) : (d^2 - 2d + 1)$.

II. $(b + bd^2 - 2bd + 2d^3 - 4d^2 + 2d) : (b + 2d)$.

III. $(12d^4m^2 - 96dm^2 + 192dm^4 + 192m^6) : (2d^2 - 4d + 8m^2)$.

§. 9.

Von den Brüchen in der Algebra überhaupt.

1. Die Regeln, welche in der Arithmetik bey Behandlung der Zahlenbrüche gegeben werden, müssen auch nothwendig hier gelten; weil, wie schon einmal erinnert worden, die Zeichen, womit man Größen ausdrückt, im Wesen derselben lediglich nichts ändern können.

2. Die einzige Eintheilung der Brüche in eigentliche und uneigentliche fällt in der Algebra oft weg; weil man allgemein nie entscheiden kann, ob z. B. bey dem Bruch $\frac{a}{b}$ das a größer als b, oder b größer als a sey.

3. Neben den vier Rechnungsarten, die auf Brüche eben so gut als auf ganze Größen angewendet werden können, lassen sich die Buchstabenbrüche auch verkleinern und der Werth derselben manchmal in Unterabtheilungsbenennungen ausdrücken.

4. Beydes, sowohl Brüche verkleinern, als dieselben in Unterabtheilungsbenennungen auflösen, hat in der Algebra so wie in der Arithmetik seinen unverkennbaren Nutzen, und muß eben darum hier gelehret werden.

§. 10.

Von Verkleinerung der algebraischen Brüche.

1. Kann ein Faktor ausfindig gemacht werden, mit dem sich sowohl der ganze Zähler als auch der Nenner eines gegebnen Bruches dividiren läßt, so heißt dieser Faktor die Verkleinerungsgröße des Bruches. So sieht man beym ersten Anblicke der Fraktion $\frac{am}{3ax}$, daß der Faktor a die Aufhebungsgröße, und folglich der verkleinerte Bruch $\frac{m}{3x}$ sey.

2. Oft geht dieß nur bey den Koefficienten allein an, oft nur bey den eigentlichen Buchstabengrößen, manchmal bey beyden zugleich. Man nehme nur diese drey Brüche $\frac{9x^2}{12m}$, $\frac{2y^3z}{5y^3}$ und $\frac{14b^3v}{35v^2}$ zur Hand, und beurtheile hier ihre Verkleinerung.

I.

$$\frac{9x^2}{12m} \overset{3}{=} \frac{3x^2}{4m}.$$

II.

$$\frac{2y^3z}{5y^3} \overset{y^3}{\smile}= \frac{2z}{5}.$$

III.

$$\frac{14b^3v}{35v^2} \overset{7v}{\smile}= \frac{2b^3}{5v}.$$

3. Auf gleiche Weise verfährt man auch, wenn der Zähler oder der Nenner, oder auch beyde zugleich mehrgliedericht sind. Es seyen etwa diese Brüche zur Verkleinerung gegeben: $\frac{15c^2+20d}{5x-45m}$, $\frac{3a^2c-4cy}{9c^2+7cz^2}$ und $\frac{4av^2-12v^2x+36v^3}{16v^2z+4v^2-32v^7}$ so wird die Behandlung ungefähr folgende seyn:

I.

$$\frac{15c^2+20d}{5x-45m} \overset{5}{\smile}= \frac{3c^2+4d}{x-9m}.$$

II.

$$\frac{3a^2c-4cy}{9c^2+7cz^2} \overset{c}{\smile}= \frac{3a^2-4y}{9c+7z^2}.$$

III.

$$\frac{4av^2 - 12v^2x + 36v^3}{16v^2z + 4v^2 - 32v^7} \overset{4v^2}{\smile} = \frac{a - 3x + 9v}{4z + 1 - 8v^5}.$$

4. Aufgaben zur Uebung.

I. $\frac{28a}{32m}$ II. $\frac{13f}{39}$ III. $\frac{4hx}{9hy}$ IV. $\frac{17d^2z}{51dz^3}$

V. $\frac{a^2 - ax}{5a + a^4}$ VI. $\frac{3my - 12mz + 15m^3}{9m - 3m + 60m^2z^4}$.

§. 11.

Von Ausdrückung der algebraischen Brüche in kleinern Unterabtheilungsbenennungen.

1. Es stelle z. B. $\frac{m}{n}$ einen Guldenbruch vor, und man wünschte an dessen Statt einen Kreuzerbruch, so ist sehr natürlich, daß man den Zähler mit der Größe 60 multipliciren müsse, und man erhält daher $\frac{60m}{n}$, von welcher Verfahrungsart ich den Grund schon in der Arithmetik gegeben habe.

2. Oft lassen sich die algebraischen Brüche nach dieser Verrichtung noch verkleinern, wodurch sie desto geschmei-

diger

diger und brauchbarer werden. Als Beyspiel diene der Zentnerbruch $\frac{3a}{20x}$ der, wenn man ihn in einen Pfundbruch umschaffen will, $\frac{300a}{20x}$, und nach der Verkleinerung $\frac{15a}{x}$ giebt.

3. Auch Brüche von mehrgliederichten Zählern werden auf die nämliche Art behandelt, indem der ganze Zähler mit der Unterabtheilungszahl multiplicirt wird, z. B. $\frac{2m - 5x}{9z}$ Reichsthaler giebt in Kreuzern

$$\frac{(2m - 5x)90}{9z} \overset{9}{=} \frac{(2m - 5x)10}{z} = \frac{20m - 50x}{z}.$$

4. Aufgaben. Man soll den Zentnerbruch $\frac{5m}{4a}$ in Pfunden, den Jahrbruch $\frac{a^2 - 3c}{8d}$ in Monaten und den Jouchartbruch $\frac{76 + 9c - 2}{20z - 80y}$ in Quadratschuhen ausdrücken, bey welcher letzter Foderung man aber wissen muß, daß 1 baierisches Jouchart 40000 Quadratschuh in sich begreift.

§. 12.

§. 12.

Von Addition der Buchstabenbrüche.

1. Sind die Nenner solcher Brüche, die addirt oder von einander abgezogen werden sollen, völlig einerley, so darf die Operation bloß mit den Zählern vorgenommen werden; indem diese Regel schon in der Arithmetik bey den Zahlenbrüchen erwiesen worden.

Z. B. $\frac{7m}{3a^2} + \frac{4x}{3a^2} = \frac{7m + 4x}{3a^2}$;

oder $\frac{8b - 1}{x + y} + \frac{3b + 5}{x + y} = \frac{11b + 4}{x + y}$.

2. Sind die Nenner nicht die nämlichen, so muß man sie gleichwohl vorher nach der arithmetischen Verfahrungsart herzustellen suchen. Es wären z. E. gegeben $\frac{a}{5c} + \frac{8b}{d^2}$, so erhält man ganz natürlich $\frac{ad^2}{5cd^2} + \frac{40bc}{5cd^2}$; folglich ist die Summe $\frac{ad^2 + 40bc}{5cd^2}$.

3. Eine gleiche Bewandtniß hat es auch mit dreyen oder mehrern Brüchen, die verschiedne Nenner haben. Man stelle etwa als Beyspiel auf: $\frac{1}{c} + \frac{9m}{4f} + \frac{6x}{5} + \frac{n}{4}$.

Bear-

Bearbeitung.

$$\frac{1}{c}+\frac{9m}{4f}+\frac{6x}{5}+\frac{n}{4}=\frac{80f+180cm+96cfx+20cfn}{80cf}$$

und durch 4 verkleinert:

$$=\frac{20f+45cm+24cfx+5cfn}{20cf}.$$

4. Es können auch die Nenner, oder die Zähler, oder beyde zugleich, aus mehrern Gliedern bestehen, wie etwa:

$$\frac{7b^3}{a+1}+\frac{8m^2-y}{2d+8z},$$

$$=\frac{14b^3+56b^3z+8am^2-ay+8m^2-y}{2ad+8az+2d+8z}.$$

5. Auch ungebrochne Größen lassen sich mit gebrochnen durch Herstellung gleicher Nenner zusammenschmelzen. Ein Beyspiel hierüber: Es seyen gegeben $5c^2+\frac{9d}{7f-1}$, so giebt es diese Rechnung:

$$\frac{5c^2}{1}+\frac{9d}{7f-1}=\frac{35c^2f-5c^2+9d}{7f-1}.$$

6. Aufgaben zur Uebung.

I. $\frac{2g}{7h}+\frac{8m}{7h}$.

II. $\frac{3x+5}{d-1} + \frac{7-x}{d-1}$.

III. $\frac{10a}{b} + \frac{6d^2}{9m}$.

IV. $\frac{9c}{hf} + \frac{4d}{2y} + \frac{7}{z}$.

V. $\frac{a^3-3f}{9k} + \frac{6m-3}{2d^2+4m^3}$.

VI. $\frac{5n+cd^2}{4h-8} + \frac{8b^3-xy}{2v-z}$.

VII. $\frac{2c-1}{7d} + 5a^2$.

§. 13.

Von der Subtraktion algebraischer Brüche.

1. Es ist schon vorher bey der Addition derley Brüche gesagt worden, wie einfach auch hier das Verfahren sey, wenn die Nenner gleich sind, folglich darf ich diesen Fall bloß mit einem Beyspiel abfertigen:

$$\frac{15m^2-7}{d+x} - \frac{3}{d+x} = \frac{15m^2-10}{d+x}.$$

2. Nicht viel schwerer wird das Geschäft, wenn die Nenner ungleich sind; indem sich ihre Gleichheit alsobald her=

herstellen läßt. Nur muß man die Regel nicht vergessen, daß im Zähler des Subtrahends, wenn er mehrgliedericht ist, die entgegengesetzten Zeichen gelten. Von beyden überall ein Beyspiel:

I.

$$\frac{11\,g^3}{3a-2} - \frac{d^2}{4x^2} = \frac{44g^3x^2 - 3ad^2 + 2d^2}{12ax^2 - 8x^2}.$$

II.

$$\frac{4a^3d - 8m^2z}{3a - 4y^2} - \left(\frac{-5d^2 \mp z}{8x^3 + 1}\right).$$

$$= \frac{32a^3dx^3 - 64m^2x^3z + 4a^3d - 8m^2z - 15ad^2 + 3az + 20d^2y^2 - 4y^2z.}{24ax^3 - 32x^3y^2 + 3a - 4y^2}$$

3. Daß die Foderung, von einer ungebrochnen Größe eine gebrochne abzuziehen, eine ähnliche Bearbeitung mit der Addition eines solchen Falles verdiene, wird jedem von selbst einleuchten. Es sey z. B. von $3x$ die Größe $\frac{5a-c}{9b}$ abzuziehen, so giebt es diesen kleinen Kalkul:

$$\frac{3x}{1} - \left(\frac{-5a \mp c}{9b}\right).$$

$$\frac{27bx - 5a + c}{9b}.$$

4. Aufgaben zur Uebung.

I. $\frac{8a}{11m^2} - \frac{7f^3}{z}$.

II. $\frac{2x+d^2}{m+1} - \frac{6m^2+3g}{a-6b}$.

III. $(4m-7) - \frac{a+b}{1-m^4}$.

§. 14.

Von der Multiplikation algebraischer Brüche.

1. Die allbekannte Regel der Arithmetik: Man multiplicire Zähler mit Zähler, und Nenner mit Nenner, macht dieses Geschäft sehr leicht. Man hat demnach hier keine weitere Erklärung, sondern bloß ein Paar Beyspiele vonnöthen.

Erstes Beyspiel.

$$\frac{3a^2}{20d} \times \frac{3a^5}{7d^2m} = \frac{9a^7}{140d^3m}.$$

Zweytes Beyspiel.

$$\frac{4m-n}{2x+y} \times \frac{b^2-c}{1-k^2} = \frac{4b^2m-b^2n-4cm+cn}{2x+y-2k^2x-k^2y}.$$

2. Lau-

2. Laufen ungebrochne Größen als Faktoren mit unter, dann braucht man wieder, wie gewöhnlich, den kleinen Vortheil, daß man durch Unterstellung des Nenners 1, der ganzen Größe ebenfalls die Gestalt eines Bruches ertheilt, so ist die gegebne Regel wieder anwendbar.

Man setze die kleine Aufgabe: $4z^3 \times \frac{5x}{2z}$. Folglich

$$\frac{4z^3}{1} \times \frac{5x}{2z} = \frac{20xz^3}{2z} = 10xz^2.$$

3. Einige Aufgaben zur Selbstübung.

I. $\frac{2c - 1}{5d^2} \times \frac{6m}{7d^2}$.

II. $\frac{8x - z^3}{4z + 6} \times \frac{a - c + 7y^2}{m^2 - 3n^2}$.

§. 15.

Von der Division algebraischer Brüche.

1. Auch hier kann man nichts bessers thun, als jene arithmetische Regel beybehalten: Man stürze den Divisorbruch um (das heißt, man mache den Zähler zum Nenner, und diesen zu jenem), und befolge das obige Gesetz der Multiplikation. Hier sind Beyspiele!

I.

$$\frac{5f}{3g^2} : \frac{2m}{9g} = \frac{5f}{3g^2} \times \frac{9g}{2m} = \frac{45fg}{6g^2m} \overset{3g}{=} \frac{15f}{2gm}.$$

II.

$$\frac{2a+d}{5c-1} : \frac{4b-d}{c^2+1} = \frac{2a+d}{5c-1} \times \frac{c^2+1}{4b-d} =$$
$$\frac{2ac^2+2a+c^2d+d.}{20bc-5cd-4b+d}.$$

2. Auch der Fall soll nicht ungerüget bleiben, wenn der Divisor oder der Dividend eine ungebrochne Größe ist. Z. B. $a : \frac{1}{c-x} = \frac{a}{1} \times \frac{c-x}{1} = ac - ax.$

Oder:

$$\frac{4d-x}{3m} : (c^2+y) = \frac{4d-x}{3m} : \frac{c^2+y}{1}$$
$$= \frac{4d-x}{3m} \times \frac{1}{c^2+y} = \frac{4d-x}{3c^2m+3my}.$$

3. Exempel zur Uebung.

I. $\frac{15m}{7x} : \frac{3c^2}{d}.$

II. $\frac{1-8y}{6m+x} : \frac{5a-3a^2}{m+9x}.$

III. $\frac{b^3-b}{3a+1} : (2m+y).$

§. 16.

§. 16.

Von Behandlung der algebraischen Brüche durch unendliche Reihen.

1. Größen, die keine Gränze haben, oder jede endliche Größe übersteigen, heißen **unendlich groß**, und werden durch das Zeichen ∞ ausgedrückt.

2. Größen hingegen, die so klein sind, daß sie zunächst an das Nichts gränzen, oder die nicht mehr kleiner können gedacht werden, werden **unendlich klein** genennt. Man drückt sie sehr natürlich durch den Bruch $\frac{1}{\infty}$ aus; denn der Werth des Bruches ist desto kleiner, je größer der Nenner ist: hier ist der Nenner unendlich groß; also der Werth des Bruches unendlich klein.

3. Behandelt man einen algebraischen Bruch als Division, so kann selber durch eine Quotusreihe ausgedrückt werden, die ohne Ende wächst, oder ohne Ende abnimmt, oder beydes zugleich thut. Man kömmt dadurch oft auf sehr nützliche Wahrheiten; und die Sache hat überhaupt in der höhern Mathematik mannigfaltigen Nutzen.

4. Es soll z. E. bey dem Bruche $\frac{a}{b - c}$ der Zähler durch die Nenner wirklich dividirt werden, so giebt es folgende Arbeit;

$$\frac{a}{(b-c)} \Big|\; \frac{a}{b} + \frac{ac}{b^2} + \frac{ac^2}{b^3} + \frac{ac^3}{b^4} \ldots\ldots$$

$$a - \frac{ac}{b}$$

$$- \quad +$$

$$+ \frac{ac}{b}$$

$$(b-c)$$

$$\frac{ac}{b} - \frac{ac^2}{b^2}$$

$$- \quad +$$

$$+ \frac{ac^2}{b^2}$$

$$(b-c)$$

$$\frac{ac^2}{b^2} - \frac{ac^3}{b^3}$$

$$- \quad +$$

$$\frac{ac^3}{b^3}$$

$$(b-c)$$

$$\frac{ac^3}{b^3} - \frac{ac^4}{b^4}$$

$$- \quad +$$

$$\frac{ac^4}{b^4} \text{ u. s. f.}$$

5. Das Gesetz, nach welchem eine solche Reihe fortwächst, ist nach etlich herausgebrachten Gliedern des Quotus leicht zu entdecken. Man sieht hier ohne weiters, daß die Exponenten von c und b bey jedem Gliede um 1 wachsen, a hingegen immer ein unveränderlicher Faktor bleibt.

6. Die

6. Die wichtige Wahrheit, die aus gegenwärtiger Division abgeleitet werden kann, ist nun diese: Da der Bruch $\frac{a}{b-c}$ der unendlichen Reihe $\frac{a}{b} + \frac{ac}{b^2} + \frac{ac^2}{b^3} + \frac{ac^3}{b^4} \ldots$ gleich ist, so muß das allemal wahr bleiben, man mag für a, b und c setzen, was man will. Nehmen wir an, jeder dieser Buchstaben gelte 1, so verwandelt sich der Bruch in $\frac{1}{1-1}$, das ist, in $\frac{1}{0}$, und die Reihe in $\frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} \ldots$ oder was das nämliche ist, in $1 + 1 + 1 + 1 \ldots$ Aber eine Anzahl von Einheiten ohne Gränze ist eine unendlichgroße Größe; daher $\frac{1}{0} = \infty$, welcher Satz in die höhere Mathematik, wie wir seiner Zeit sehen werden, einen sehr wichtigen Einfluß hat.

§. 17.

Von den Gleichungen und ihrer Behandlung.

1. Da die Algebra alles durch Gleichungen rechnet, so verdient dieser Artikel vorzüglich die Aufmerksamkeit des Schülers.

2. Unter Gleichungen versteht man überhaupt einen doppelten Ausdruck der nämlichen Größe. — Es giebt aber

aber zweyerley Arten von Gleichungen, nämlich identische Ausdrücke, oder verschiedene Modifikationen einer Größe und algebraische Gleichungen im strengern Sinne.

3. Identische Ausdrücke oder Gleichungen in minder strengem Sinne sind die, wo der Grund der Gleichheit in den dabey angebrachten Rechnungsarten liegt. Es sind demnach $5 = \frac{10}{2}$ oder $3 + 9 = 14 - 2$ keine eigentlichen Gleichungen; weil in der ersten die Division, in der andern aber die Addition und Subtraktion den Grund der Gleichheit enthält.

4. Liegt hingegen der Grund der Gleichheit in dieser oder jener Bedingung irgend einer Aufgabe, oder in einem erwiesenen Lehrsatze, so hat man wahrhafte algebraische Gleichungen. Z. B. Jemand verlangt eine Zahl, wovon die Hälfte um 10 größer als der dritte Theil ist, so läßt sich diese Bedingung füglich durch gegenwärtige Gleichung ausdrücken $\frac{x}{2} - 10 = \frac{x}{3}$.

Oder wenn in der Naturlehre unter unzähligen andern Sätzen erwiesen wird, daß q die Größe der Bewegung eines Körpers erhalten werde, wenn man dessen Gewicht p durch die Geschwindigkeit c multiplicirt, so hat man die Gleichung $q = cp$. Setzt man, es sey eine von diesen Größen unbekannt, so bekömmt sie die Gestalt $x = cp$ oder $q = cx$, oder endlich $q = px$.

5. Die

5. Die Größen, welche einander gleich sind, sie mögen ein- oder mehrgliedericht seyn, heißen die Seiten der Gleichung. Ueberhaupt läßt sich jede Gleichung sehr wohl durch eine Wage versinnlichen, wo das Zeichen = den Wagbalken, die zwo Seiten hingegen, die mit gleicher Last beschwerten Schaalen vorstellen.

6. In jeder algebraischen Gleichung findet sich wenigst eine, wo nicht mehrere unbekannte Größen vor, deren positiver Werth bestimmt werden soll. Man kann dieß aber dadurch bewerkstelligen, wenn die unbekannte Größe auf einer Seite ganz allein herausgebracht wird, so daß sich auf der andern Seite lauter bekannte Größen befinden, und die Gleichheit nicht im geringsten gestört wird. Man heißt dieß, eine Gleichung ausführen.

7. Welche Mittel hat man aber, um in einer Gleichung die unbekannte Größe von allen bekannten Größen, mit denen sie durch verschiedene Rechnungsarten verflochten ist, gänzlich zu befreyen, und doch dabey die Gleichheit beyzubehalten? — Diese Mittel sind eben wieder die vier Rechnungsarten selbst, welche man mit gleichen Größen immer auf beyden Seiten zugleich anwendet, nebst den vier Grundsätzen, die uns berechtigen, dieß thun zu dörfen.

8. Diese Grundsätze heißen so:

I. Wenn

I. Wenn man Gleiches zu Gleichem addirt, so erhält man gleiche Summen.

II. Gleiches von Gleichem abgezogen, giebt gleiche Reste.

III. Multiplicirt man Gleiches mit Gleichem, so erscheinen gleiche Produkte.

IV. Dividirt man Gleiches durch Gleiches, so überkömmt man gleiche Quottusse.

9. Gesetzt nun, es stehe eine bekannte Größe neben der positiven unbekannten in der Addition, so kann diese von jener nur dadurch befreyt werden, daß man selbe auf beyden Seiten subtrahirt; weil sich dabey die bekannte Größe auf jener Seite, wo man sie wegwünscht, aufhebt, und demungeachtet die Gleichheit, vermög des ersten Grundsatzes beybehalten wird. Es seyen z. B. die zwo einfachen Gleichungen $x + 7 = 11$ und $a + x = b$ gegeben, so wird ihre Behandlung so aussehen:

I.

$$\begin{array}{r} x + 7 = 11 \\ -7 \quad -7 \\ \hline x \quad = 4 \end{array}$$

II.

$$\begin{array}{r} a + x = b \\ -a \qquad -a \\ \hline x = b - a \end{array}$$

10. Eben

10. Eben so begreiflich ist es, daß man bekannte Größen, die mit der unbekannten durch die Subtraktion verbunden sind, mittels der Addition wegbringe. Nehmen wir als Beyspie wieder die zwo Gleichungen $x - 3 = 14$ und $y - c = 5$.

Behandlung.

I.

$$\begin{array}{rcl} x - 3 &=& 14 \\ +\,3 && +\,3 \\ \hline x &=& 17 \end{array}$$

II.

$$\begin{array}{rcl} y - c &=& 5 \\ +\,c && +\,c \\ \hline y &=& c + 5. \end{array}$$

11. Man sieht auch zugleich aus den Beyspielen $a + x = b$ und $y - c = 5$, daß in Fällen, wo man einerseits nicht wirklich addiren oder subtrahiren kann, die bekannte Größe bloß mit dem verkehrten Zeichen auf die Gegenseite gesetzt werden darf. Man habe z. B. $3 + z = h$ oder $x - b^2 = 2f$ so giebt dieß nach der Versetzung $z = h - 3$, und $x = b^2 + 2f$.

12. Auf diese Weise, nämlich durch Versetzung mit den verkehrten Zeichen, können auch mehrere bekannte Größen auf einmal von der unbekannten weggebracht werden, wie etwa in der Gleichung $6a - 5c + m + x - 1 = d - b$, wo sogleich diese daraus wird:

$$x = d - b - 6a + 5c - m + 1.$$

13. Es

13. Es ist auch nicht unmöglich, daß in einer Gleichung die unbekannte Größe mit einer bekannten multiplicirt sey. In solch einem Fall wird die beyderseitige Division durch eben diese bekannte Größe die besten Dienste thun. Z. B. in $6x = 28$ oder in $bz = d - 1$.

Behandlung.

I.

$$6x = 28$$

$$:6 \qquad x = 4\tfrac{4}{6} = 4\tfrac{2}{3}.$$

II.

$$bz = d - 1$$

$$:b \qquad z = \frac{d - 1}{b}.$$

14. Umgekehrt ist die Sache eben so richtig. Man kann eine unbekannte Größe von einem bekannten Divisor befreyen, wenn man beyderseits mit demselben multiplicirt. Es sey gegeben $\frac{y}{8} = 3c - 1$ oder $\frac{z}{3b} = 4a + c^2$.

Behandlung.

I.

$$\frac{y}{8} = 3c - 1$$

$$\times 8 \qquad y = 24c - 8.$$

II.

II.

$$\frac{z}{3b} = 4a + c^2$$

$$\times 3b \qquad z = 12ab + 3bc^2.$$

15. Die Anwendung der vier obigen Grundsätze läßt sich nun in diese einzige Regel zusammenziehen: Jede bekannte Größe läßt sich von der unbekannten durch eine Rechnungsart wegbringen, die jener entgegengesetzt ist, welche die beyden Größen miteinander verbindet. Dieß heißt mit mehr Ausführung: Ein addirtes Glied wird durch die Subtraktion weggebracht, ein subtrahirtes durch die Addition, ein multiplicirtes durch die Division, und ein dividirtes durch die Multiplikation.

16. Es kann sich aber auch fügen, daß die unbekannte Größe in einer Gleichung negativ vorkömmt. Hier muß man allererst trachten, selbe positiv zu machen. Dieß kann aber gar leicht durch die Hinübersetzung auf die andere Seite geschehen. Nach der Hand sind wieder die obigen Regeln anzuwenden. Ein Beyspiel hierüber!

$$3a - x = m + 1$$

Vers. $3a = m + x + 1$

Vers. $3a - m - 1 = x.$

17. Man kann auch, ohne Hinübersetzung der unbekannten Größe, alle Zeichen in der ganzen Gleichung in

die

die entgegengesetzten verändern; weil das so viel heißt, als beyderseits mit der Größe -1 multipliciren oder dividiren. Die Sache bekömmt dann folgendes Ansehen:

$$3a - x = m + 1$$

$\times -1 \qquad -3a + x = -m - 1$

Vers. $\qquad x = 3a - m - 1.$

18. Manchmal wird die unbekannte Größe auf beyden Seiten der Gleichung angetroffen. Bey dieser Ereigniß muß man streben, sobald es möglich ist, sie auf einer Seite wegzubringen, doch so, daß sie auf der andern Seite nicht negativ erscheint. Man kann dieß allemal verhüten, wenn man das Gegentheil von jener Behandlung unternimmt, die die unbekannte Größe negativ hervorbringen würde. Man nehme die Gleichung vor die Hand $4m - 7x = 2x + 8$. Wollte man hier $2x$ wegbringen, so müßte man selbe überall abziehen und man erhielte $4m - 9x = 8$, wo x sich negativ zeigt. Man muß demnach das Gegentheil thun und $7x$ wegbringen. Daher

$$4m - 7x = 2x + 8$$
$$\underline{\quad + 7x + 7x \quad}$$
$$4m = 9x + 8$$

Vers. $\qquad 4m - 8 = 9x$

$: 9 \qquad \dfrac{4m - 8}{9} = x.$

19. Zuweilen ergiebt es sich, daß die unbekannte Größe öfter auf einer Seite zu stehen kömmt, und zwar mit

mit gleichartigen Koefficienten. In diesem Falle kann aber jederzeit durch Abkürzung geholfen werden, z. B.

$$5x + 7x - x = a - 1$$

abgek. $11x = a - 1$

$:11$ $x = \frac{a - 1}{11}.$

20. Sind die Koefficienten ungleichartig, so muß eine Zerfällung in zween Faktores vorgenommen werden, wo ein Faktor die unbekannte Größe und die andere die Koefficienten mit ihren Bindezeichen vorstellt. Z. B.

$$ax - x + cx = b$$

Zerf. $x(a - 1 + c) = b$

$:(a - 1 + c)$ $x = \frac{b}{a + c - 1}.$

21. Dieser letztere Fall ergiebt sich vorzüglich gerne, wenn die unbekannte Größe irgendwo Nenner eines Bruches ist, als etwa in

$$\frac{a}{2x} - m = c$$

$\times 2x$ $a - 2mx = 2cx$

Vers. $a = 2cx + 2mx$

Zerf. $a = x(2c + 2m)$ $:(2c + 2m)$

$$\frac{a}{2c + 2m} = x$$

oder $\frac{a}{2(c + m)} = x.$

 22. Sind

22. Sind die Gleichungen mehr zusammengesetzt, so ist es am besten, wenn man allererst die Divisionen wegschaft, dann die addirten und subtrahirten Glieder in Ordnung bringt, und zuletzt die bekannten Koefficienten durch die Division hebt. Ein einziges Exempel hierüber:

$$\frac{a+3x}{2m}-d=\frac{x+1}{3}$$

$\times 2m$ $\quad a+3x-2dm=\frac{2mx+2m}{3}$

$\times 3$ $\quad 3a+9x-6dm=2mx+2m$

Vers. $\quad 9x-2mx=6dm-3a+2m$

Zers. $\quad x(9-2m)=6dm-3a+2m$

$:(9-2m$ $\quad x=\frac{6dm-3a+2m}{9-2m}.$

23. Aufgaben zur Uebung.

I. $x+9=17.$ II. $m+x=a.$ III. $y-4=1.$ IV. $z-c=d+1.$ V. $3a-c+x-5=7f+m.$

VI. $10y=8b-c.$ VII. $2az=12d.$ VIII. $\frac{z}{4}=2a-b.$

IX. $\frac{x}{3c}=mn.$ X. $40-x=15.$ XI. $2f-x=3a^2.$

XII. $9z-m=3z+a.$ XIII. $13x-8x+2x=5g-1.$

XIV. $by-cy+y=a-3m.$ XV. $\frac{5d}{2x}-4d+9=2a+1.$

XVI. $\frac{b^2-7x}{a-1}=\frac{2a-mx}{3f}+5.$

§. 18.

§. 18.

Vorläufige Proportionslehre.

1. Eine Proportion ist die Zusammenstellung zweyer gleichen Verhältnisse; und ein Verhältniß ist die Vergleichung zwoer Größen: woraus erhellet, daß jede Proportion aus 4 Gliedern besteht.

2. Die Größen lassen sich auf zweyerley Weise vergleichen; denn man sieht entweder auf ihren **Unterschied**, oder auf ihren Inhalt. Ich kann z. B. von den Zahlen 4 und 12 sagen, daß 4 um 8 kleiner als 12 sey: oder daß 4 in 12 dreymal enthalten sey. Im ersten Falle vergleicht man **arithmetisch**, im zweyten **geometrisch**. Daher nun zweyerley Verhältnisse, und eben darum auch zweyerley Proportionen.

3. Das Zeichen der arithmetischen Vergleichung zweyer Größen ist ein dazwischen gezogner Querstrich 4 — 12, und der geometrischen ein Doppelpunkt 4 : 12; denn um den **Unterschied** zweyer Größen zu finden, muß man **subtrahiren**; und um zu bestimmen, wie oft eine Größe in der andern enthalten sey, muß dividirt werden; daher sind die Zeichen dieser beyden Rechnungsarten hieher nicht unschicklich gewählt.

4. Wenn bey einem Verhältniß das Vorderglied kleiner als das Hinterglied ist, wie 4 — 12 oder 4 : 12, so wird es ein steigendes Verhältniß genennt; bey der entgegengesetzten Bedingung ein fallendes, z. B. 8 — 2 oder 8 : 2.

5. Verbindet man nun, wie zum Theil schon gesagt worden, zwey steigende oder zwey fallende arithmetische Verhältnisse von einerley Unterschied durch das Gleichheitszeichen, so hat man eine *arithmetische Proportion*. Zwey solche geometrische Verhältnisse von einerley Quotus geben eine geometrische Proportion.

$$4 - 12 = 6 - 14$$

$$4 : 12 = 6 : 18.$$

6. Wenn gähling in einer arithmetischen oder geometrischen Proportion die mittleren 2 Glieder gleich sind, so heißt sie eine stätige Proportion, wie etwa 5 — 7 = 7 — 9 oder 2 : 4 = 4 : 8. Man drückt sie oft schlechtweg nur durch 3 Glieder aus, als 5 — 7 — 9 und 2 : 4 : 8.

7. Heißt das Vorderglied eines steigenden arithmetischen Verhältnisses allgemein a oder b, so muß das Hinterglied, wenn d die Differenz (Unterschied) ausdrückt a + d, oder b + d heißen; in fallenden hingegen a — d oder b — d. Daher die allgemeine Formel für alle möglichen Proportionen, sie mögen steigend oder fallend seyn,

$$a - (a \pm d) = b - (b \pm d).$$

Was

Was von ihr behauptet werden kann, das gilt von allen arithmetischen Proportionen.

8. Wenn bey einem geometrischen Verhältniß das Vorderglied ebenfalls durch a oder b, und der Quotus durch q vorgestellt wird, so ist das Hinterglied aq oder bq, und die Formel für alle möglichen geometrischen Proportionen: $a : aq = b : bq$.

9. Es versteht sich von selbst, daß q bey steigenden Verhältnissen größer als 1, und bey fallenden kleiner als 1, das heißt ein eigentlicher Bruch seyn müße; denn in $4 : 12 = 6 : 18$ ist $q = 3$; weil $12 = 4 \times 3$ und $18 = 6 \times 3$, daher $4 : 4 \times 3 = 6 : 6 \times 3$. Hingegen in $12 : 4 = 18 : 16$ gilt $q = \frac{1}{3}$; denn $4 = 12 \times \frac{1}{3}$ und $6 = 18 \times \frac{1}{3}$.

10. Will man gähling auch für die stätigen Proportionen eine Formel haben, so wird sie im Arithmetischen so aussehen: $a - (a \pm d) = (a \pm d) - (a \pm 2d)$, oder in 3 Gliedern: $a - (a \pm d) - a \pm 2d$; im Geometrischen hingegen $a : aq = aq : aq^2$ oder schlechtweg $a : aq : aq^2$.

11. In jeder arithmetischen Proportion ist die Summe der zwey äußern Glieder gleich der Summe der zwey mittleren Glieder.

Beweis.

In $a - (a \pm d) = b - (b \pm d)$ sind die

äuße-

$$\text{äußeren}\left(\frac{a \quad b \pm d}{a + b \pm d}\right) = \text{mittleren}\left(\frac{a \pm d \quad b}{a + b \pm d}\right).$$

12. Man kann demnach jede solche Proportion in eine sehr einfache Gleichung umschaffen, und, im Falle ein Glied unbekannt ist, dasselbe leicht finden, z. B.

$$7 - 11 = x - 5$$
$$12 = x + 11$$
$$-11 \quad -11$$
$$1 = x.$$

13. Praktische Anwendung.

I.

Wenn es in München 6 Uhr 9 Minuten ist, so weisen die Uhren in London 5 Uhr 23 Minuten. Wie viel Uhr wird es in München seyn, wenn der Zeiger in London auf 9 Uhr 17 Minuten steht?

Auflösung.

Da die Zeitdifferenz zweyer Ortschaften immer sich selbst gleich bleibt, so stehen sie eben darum in einer arithmetischen Proportion. Daher

Münch. Lond. M. L.

$$6^\circ,9' - 5^\circ,23' = x - 9^\circ,17'$$
$$15^\circ\ 26' = x + 5^\circ,23'$$
$$-5^\circ\ 23 \quad -5,23$$

Antw. $10^\circ\ 3' = x$

II.

II.

In einer Familie war der Herr bey seiner Einsegnung 38 Jahr 7 Monat und 19 Tag alt, die Frau hingegen 25 Jahr 1 Monat 21 Tag. Als der Herr starb, zählte die Frau gerade 44 Jahr 5 Monat und 11 Tag, wie alt ist der Herr geworden?

Auflösung.

H. F. H.

38 J. 7 M. 19 T. — 25 J. 1 M. 21 T. = x — F. 44 J. 5 M. 11 T.

82 J. 12 M. 30 T. = x + 25 J. 1 M. 21 T.

— 25 J. 1 M. 21 T. — 25 J. 1 M. 21 T.

Antw. 57 J. 11 M. 9 T. = x.

III.

Zwey Mühlen A und B mahlen mit gleicher Geschwindigkeit. Nun bekam die Mühle A vom Proviant 77 Schäffel zur nämlichen Zeit, als die Mühle B 69 Schäffel erhielt. Nach etlichen Tagen war auf der Mühle A alles bis auf 11 Schäffel gemahlen; wie viel wird in der Mühle B noch übrig seyn?

Auflösung.

A. B. A. B.

$77 - 69 = 11 - x$

$x + 77 = 80$

$- 77 \quad - 77$

Antw. $x = 3$ Schäffel.

14. Bey=

14. Beyspiele zur Uebung.

I.

Wenn es in München 3 Viertel auf 10 Uhr schlägt, hat man in Jerusalem schon 20 Minuten über 11 Uhr. Um welche Stunde Münchnerzeit ist Kristus gestorben, wenn sich dieß zu Jerusalem um 3 Uhr Abends zutrug?

II.

Zween Eilboten reisen in größter Geschwindigkeit nach Paris. Als der Bote A $17\frac{1}{2}$ Meil von München weg war, hatte B schon 49 Meilen zurück gelegt. Wie weit wird A von München entfernt seyn, wenn B schon in Paris ist, und von München nach Paris 53 Posten oder 106 Meilen gerechnet werden?

III.

Aus zwey Fässern wird immer gleich viel Wein abgezapft. Das kleinere faßte 14 Eimer 36 Maaß, das größere 23 Eimer 44 Maaß. Nun ist das kleinere schon bis auf 1 Eimer 50 Maaß ausgeronnen; wie viel Wein wird noch im größern Faße seyn?

15. In einer stätigen, durch 3 Glieder ausgedrückten, Proportion ist die Summe der äußern Glieder gleich dem doppelten mittlern Gliede; denn in

$$a \div (a \pm d) - (a \pm 2d)$$

sind die äußern $\left(\begin{array}{l} a \\ a \pm 2d \\ \hline 2a \pm 2d \end{array}\right.$ und das mittlere $\begin{array}{c} a \pm d \\ 2 \\ \hline 2a \pm 2d \end{array}$

$$2a \pm 2d = 2a \pm 2d$$

16. Es

16. Es läßt sich also zwischen zwey ungleichen Zahlen leicht das arithmetische Mittel finden. Es seyen z. B. a und b die Zahlen, so ist a — x — b

$$a + b = 2x$$

$$\frac{a+b}{2} = x.$$

17. Sind es drey verschiedne Größen, als a, b und c, so müssen sie, der Analogie zufolge, ebenfalls zusammen addirt und durch 3 dividirt werden

$$\frac{a+b+c}{3} = x.$$

18. Ueberhaupt wird aus mehrern verschiednen Angaben die gehörige Mittelzahl gefunden, wenn man dieselben addirt, und durch ihre Anzahl dividirt:

$$\frac{a+b+c+d \;\&c.}{n} = x.$$

19. **Praktische Anwendung.**

I.

Die baierische Maaß hält nach Kruse $53\frac{3}{4}$, und nach H. Prof. Westenrieder $54\frac{1}{2}$ französische Kubikzolle, was ist das arithmetische Mittel?

Auflösung.

$53\frac{3}{4}$ — x — $54\frac{1}{2}$

$108\frac{1}{4} = 2x$

:2 Antw. $54\frac{1}{8} = x$

II.

II.

Man hat durch Versuche gefunden, daß ein Schäffel Roggen von der besten Gattung 300 baierische Pfunde, vom schlechtern hingegen 270 Pfund wiege; was ist das Gewicht eines Schäffels im Durchschnitt?

Auflösung.

$$300 - x - 270$$
$$570 = 2\,x$$
Antw. $285 = x.$

III.

Man kauft 4 Pferde um folgende Preise: 107, 148, 179 und 184 fl.; wie hoch kömmt eines im Durchschnitt?

Auflösung.

$$\frac{107 + 148 + 179 + 184}{4} = x$$
$$\frac{618}{4} = x$$
Antw. $154\frac{1}{2} = x.$

20. Beyspiele zur Uebung.

I.

Ein Schäffel vom besten Waizen wiegt 336 baierische Pfund, von sehr schlechtem hingegen 294 Pfund. Was wiegt ein Schäffel Waizen im Durchschnitt?

II.

Die kleinste Entfernung der Erde von der Sonne im Winter beträgt 18255 und die größte im Sommer 18514 Halbmesser der Erde; wie groß ist die mittlere Entfernung zur Zeit der Nachtgleiche?

III.

Ein Landmann schrieb den Ertrag eines seiner Aecker von Jahr zu Jahr auf, und bekam in 6 Jahren folgende Ernten: $18\frac{1}{2}$, 17, $15\frac{1}{4}$, 20, $19\frac{3}{4}$ und $16\frac{1}{2}$ Schäffel. Wie viel Schäffel darf er im Durchschnitt jährlich rechnen?

21. In jeder geometrischen Proportion ist das Produkt der äußern Glieder gleich dem Produkte der mittleren Glieder.

Denn in $a : aq = b : bq$

ist $abq = abq$.

22. Also können auch die geometrischen Proportionen in einfache Gleichungen umgeschaffen, und ein unbekanntes Glied sehr leicht gefunden werden, z. B.

$$8 : 24 = 70 : x$$

$$8x = 1680$$

$$: 8 \qquad x = 210.$$

Oder

Oder

$$3 : x = 5\tfrac{1}{4} : 17$$

$$3 : x = \tfrac{21}{4} : 17$$

$$51 = \tfrac{21x}{4}$$

$\times 4$ $$204 = 21x$$

21 $$9\tfrac{15}{21} = x$$

oder $$9\tfrac{5}{7} = x.$$

23. Praktische Anwendung.

I.

Was kostet das Pfund Quecksilber, wenn das Pfund Silber zu 48 fl. gerechnet wird, und sich der Werth des Merkurs zu dem des Silbers wie 3 : 26 verhält?

Auflösung.

$$x : 48 = 3 : 26$$

$$26x = 144$$

: 26 $$x = 5\tfrac{7}{13}$$ fl. Antw.

II.

Ein silberner Leuchter wiegt 9 Mark 9 Loth. Was würde er wägen, wenn er von Gold wäre, da sich die Schwere des Goldes zu der des Silbers wie 7717 : 4357 verhält?

Auflösung.

7717 : 4357 = x : 9 M. 9 L.

oder $$7717 : 4357 = x : 153$$

$$1180701 = 4357x$$

Antw. $270\tfrac{4311}{4357} = x$ in Lothen.

oder 16 M. 15 Loth beynahe.

III.

III.

Ein Fuhrmann ladet Burgunderwein, welcher ohne Geschirr $43\frac{5}{8}$ Zentner wiegt. Ein andermal führt er eben so viele Eimer Mosler. Wie schwer hat er dießmal aufgeladen, da sich die Schwere des Burgunders zur Schwere des Moslers wie 953 : 916 verhält?

Auflösung.

$$43\tfrac{5}{8} : x = 953 : 916$$
$$\tfrac{349}{8} : x = 953 : 916$$
$$\tfrac{319684}{8} = 953x$$
$$319684 = 7624x$$

Antw. $41\frac{1775}{1906} = x.$

24. Beyspiele zur Uebung.

I.

Der Werth des Zinnes verhält sich ungefähr zum Werth des Kupfers wie 290 : 344. Bey einer Versteigerung wird eine zinnerne Flasche auf 7 fl. 20 kr. angeschlagen: wie hoch kömmt eine gleichgroße Flasche von Kupfer zu stehen?

II.

Einige Baumeister behaupten, daß sich bey Fensterstöcken die Breite zur Höhe wie 2 : 3 verhalten sollen. Nun sind für ein Haus 7 Schuh 9 Zoll hohe Fenster bestellt, wie groß wird da die Breite ausfallen müssen?

III.

III.

Ein Landmann weiß, daß, wenn er seinen Wagen mit fichternen Scheiterholz voll ladet, er $27\frac{3}{4}$ Zentner schwer zu führen habe. Wie schwer at er, wenn er eben so viel buchenes, oder eben so viel ahornes, oder eichenes auf ladet; da sich die Schweren dieser Holzarten wie die Zahlen 55, $85\frac{2}{5}$, $75\frac{1}{2}$ und $92\frac{9}{10}$ verhalten?

25. Jede Proportion, sie mag arithmetisch oder geometrisch seyn, läßt ihre Gestalt durch Versetzung 8mal ändern, ohne daß ihre Wesenheit dabey leidet. Hier ist die Entwicklung der allgemeinen Formel für den geometrischen Fall, wo bald die mittleren Glieder verwechselt, bald beyde Verhältnisse umgeschlagen werden.

$$a : aq = b : bq$$
$$a : b = aq : bq$$
$$b : a = bq : aq$$
$$b : bq = a : aq$$
$$bq : b = aq : a$$
$$bq ; aq = b : a$$
$$aq : bq = a : b$$
$$aq : a = bq : b.$$

26. Die Regel Detri ist nichts anders, als eine geometrische Proportion, wo die beyden mittleren Glieder verwechselt worden, und das vierte unbekannte Glied wegbleibt. Denn wenn 5 Ellen um 20 fl. gekauft werden, so werden noch so viele Ellen des nämlichen Tuches auch noch so viel Geld kosten, nämlich 10 Ellen kosten 40 fl.

So

So oft also die Ellen in Ellen enthalten sind, eben so oft ist der Preis der erstern im Preise der letztern enthalten. Daher

5 E. : 10 E. = 20 fl. : 40 fl.

Gesetzt nun, der Preis der letztern wäre unbekannt, so hieß die Proportion: 5 E. : 10 E. = 20 fl. : x fl. Läßt man das x weg, und verwechselt die mittleren Sätze, so entsteht die Regel Detri: 5 E. : 20 fl. = 10 E. Weil nun die zwey letztern Glieder 20 und 10 vorher die mittleren waren, dann 5 und x die äußeren, so ist

$$5x = 20 \times 10$$

$$\text{und} \quad x = \frac{20 \times 10}{5}.$$

Das heißt: Man muß bey der Regel Detri den zweyten und dritten Satz miteinander multipliciren, und das Produkt durch den ersten dividiren. Für den Ansatz selbst läßt sich folgende Regel ableiten: Die Fragezahl steht zu Ende, und die gleichnamige andere am Anfang. Die dritte Zahl, welche mit der unbekannten gleichen Namen hat, in der Mitte.

28. Praktische Anwendung.

I.

Ein Stück Tuch hält 65 englische Yards, wie viel Ellen wird es in Leipzig messen, wenn 5 englische Yards 8 Leipzigerellen machen?

Auf-

Auflösung.

Yards	Leipzigerellen	Yards ?
5	8	65

65
8
―――
520
555

104 Leipziger-ellen.

II.

Nach Vorheck machen 200000 römische Sesterzien (Sestertii) $6944\frac{5}{12}$ Reichsthaler, was macht ein Sestertium, d. i. eine Summe von 1000 Sesterzien?

Auflösung.

Sest.	Rthlr.	Sest.
200000	$6944\frac{5}{12}$	1000

200000
12
―――
2400000

13893
6944
―――
83333
1000
―――
83333000 | $34\frac{1733}{2400}$ Rthlr.
24 00000
72
―――
113
24
96
―――
17.

Anmerk. Der erste Satz wurde deßwegen mit dem Nenner multiplicirt, damit am Ende keine Zwölftelsreichsthaler, sondern Ganze herauskommen.

III.

III.

Mit einer Mark oder 16 Loth feinen Goldes können $67\frac{67}{71}$ Dukaten ausgemünzt werden; wie viel Mark braucht man zu 1000 Dukaten?

Auflösung.

Duk.	Mark.	Duk.	
$67\frac{67}{71}$	1	1000	
134		71	
469		71000	$14\frac{433}{603}$ Mark.
4824		4824	
		22760	
		4824	
		19296	
		3464.	

Anmerk. Weil im ersten Satze 71gerl von Dukaten sind, so müssen auch die 1000 Dukaten im letzten Satze dazu reducirt werden.

29. Beyspiele zur Uebung.

I.

Eine deutsche Meile hält im Durchschnitt mehrerer Angaben 23640 rheinische Schuhe; was macht dieß im baierischen Maaße, da 12938 rheinische 13913 baierische Schuhe geben?

II.

100 fl. Permißgeld in Antwerpen haben gleichen Werth mit $116\frac{2}{3}$ fl. Reichswährung, oder im 20 fl. Fuß. Was macht eine Schuld von 742 fl. Permißgeld nach dem Reichsfuße?

III.

Zu $31\frac{5}{37}$ Karolins braucht man eine Mark reines Gold; wie viel wird man zu 6000 Karolinen nöthig haben?

30. Solange in der Regel Detri die Beyspiele von der Art sind, daß sich die Größe der unbekannten Zahl nach der Größe des dritten Satzes richtet, so lange ist die Regel Detri ordentlich oder gerade. Muß aber die unbekannte Zahl desto kleiner ausfallen, je größer das letzte Glied ist, und wechselsweise, dann heißt sie die verkehrte Regel Detri. Es wird von derselben noch später Meldung geschehen.

31. Es ist im menschlichen Leben ein durch Theorie und Erfahrung allgemein erprobter Satz, daß sich die Wirkungen, bey übrigens gleichen Umständen, genau wie ihre Ursachen verhalten. Zwey Personen arbeiten noch so viel als eine. 300 fl. Kapital tragen dreymal mehr Zins als 100 fl. u. s. f. Wenn daher die Ursachen u und U, ihre Wirkungen aber w und W heißen, so ist

$$u : U = w : W$$

und $$uW = Uw.$$

32. Drückt man das Gleichheitszeichen durch einen Senkstrich aus, und deutet man die Multiplikation durch Untereinanderschreiben der Faktoren an, welche links die

äußern

äußern und rechts die mittlern Glieder ausmachen, so hat man die allgemein beliebte reesische Regel.

u*	w
W	U.

wo gewöhnlich das mangelnde Glied zuerst gesetzt wird, und ein gleichartiges zuletzt die Kette schließen muß.

33. Die Reesische Regel hat nebst der leichten Ansetzungsart auch noch als Gleichung den Vortheil, daß man die Glieder beyderseits mit gleichen Zahlen dividiren, und also oft stark abkürzen kann.

34. Praktische Anwendung.

I.

Zu 2000 Ziegelstein braucht man allemal 24 Metzen Kalk. Nun verlangt eine Mauer 15800 Steine; wie viel wird Kalk erfodert?

	Metzen*	15800 Steine	
	2000	24 Metzen	
: 2	10	12	
		316	
	1	158	
	1	1896	$189\frac{3}{5}$ Metzen.
	1	.0	

II.

Wie schwer wird ein Geldsack voll Kopfstücke von 640 fl. seyn, wenn 8400 Stück derselben auf einen baierischen Zentner gehen?

℔*	640 fl.
2	5 Kopfst.
8400	100
21	320
	80

400	$19\frac{1}{21}$ ℔.
21	
190	
21	
189	
1.	

35. Beyspiele zur Uebung.

I.

Drey Maurer sollen täglich 2 Quadratklafter Decken fertig machen; wie viel braucht man Maurer, wenn täglich 18 Klafter fertig werden müßen?

II.

Ein Geldsack, mit halben Kopfstücken angefüllt, wiegt $28\frac{1}{2}$ Pfund; wie viel Gulden sind es, da bekanntlich 14400 Stück auf den baierischen Zentner gehen?

36. In einigen Fällen ist die Ursache oder die Wirkung zusammengesetzt. Z. B. Bey Zinsrechnungen ist Kapital und Zeit die Ursache, und Interessen die Wirkung. Die Größe einer Wirkung von Arbeitern bey Grabung eines Kanals oder dergl. muß nach der Länge, Breite und Tiefe geschätzt werden u. s. f.

37. An-

37. Anwendung hievon.

I.

Wie lang müßen 8960 fl. zu $4\frac{1}{2}$ Procent liegen bleiben, daß sie 1060 fl. Zinsen tragen?

(J. *	1060 fl. Z.	
(fl. 8960		
fl. $4\frac{1}{2}$	1 J.)	
2	100 fl.)	
9	2	
448		
224	53	
9	5300	2 Jahr
2016	2016	
	4032	
	1268	
	12	
	2536	
	1268	
	15216	7 gegen 8 Monat
	2016	
	14112	
	1104.	

II.

Dreyßig Arbeiter graben in 20 Tagen einen Kanal der 40 Schuh lang, 5 Schuh tief und 8 Schuh breit ist. Nun soll ein anderer Kanal von 50 Schuh Länge, 6 Schuh Tiefe und 10 Schuh Breite in 36 Tagen fertig werden; wie viel hat man Arbeiter nöthig?

Arb.

(Arb. *	1 Gr.	
(T. 3~~6~~	5~~0~~ Sch. L.	
	~~6~~ Sch. T.	
	~~1~~~~0~~ Sch. B.	
Gr. 1		
4~~0~~	3~~0~~ Arb.	
~~5~~	~~2~~~~0~~ T.	
~~8~~	5	
~~6~~	5	
4	5	
	25	
	5	
	1)	
	~~1~~2~~5~~	31 bis 32 Arbeiter.
	44	

38. Beyspiele zur Uebung.

I.

Wie groß muß ein Kapital seyn, daß es zu $3\frac{1}{4}$ Procent in 11 Jahren 792 fl. Interessen trägt.

II.

Einen viereckichten Anger von 870 Schritten in der Länge und 440 in der Breite abzumähen, brauchen 18 Mann 3 Tage lang. Wie lange werden 7 Mann mit einem andern Anger zu thun haben, der 230 Schritt lang und 156 Schritt breit ist?

§. 19.

§. 19.

Von der Art und Weise, wie algebraische Probleme in Gleichungen zu bringen sind.

1. Schon in der Arithmetik geräth man manchmal in Verlegenheit, wie für diesen oder jenen Rechnungsfall der Ansatz zu finden sey: um wie viel mehr muß diese Foderung in der Algebra der menschlichen Vernunft zu schaffen geben?

2. Jedoch giebt es einen Schlüßel zu diesem Geheimnisse, der mir noch allemal in den verworrensten Fällen gute Dienste that; obgleich ich denselben bis daher noch in keinem algebraischen Lehrbuche angetroffen habe. — Ich werde ihn daher bey gegenwärtigen Werkchen zum Grunde legen, und bey der Auflösung der Probleme eine Weile fort davon Gebrauch machen.

3. Dieser Schlüßel besteht darinn, daß man, nach wohlüberlegten Bedingungen der Aufgabe und nach wohlverstandner Frage, geflissentlich annehme oder sich einbilde, es sey das Problem schon aufgelöset; und daß man sich also die Frage durch die nächste beßte Zahl selbst beantworte.

4. Nun mache man mit dieser eingebildeten Zahl die förmliche Probe. Bey jeder Probe eines gerechneten Exempels ergeben sich am Ende bekanntlich zwo Zahlen, die, wenn man sie zusammen hält, gleich seyn müssen. Folglich kommen auch hier zwo Zahlen zum Vorschein, die aber ungleich seyn werden; außer man hätte die wahre Zahl errathen, welches aber ein äußerst seltner Fall ist. Aus dieser Ungleichheit schließt man sehr natürlich, daß die angenommene Zahl falsch sey. Sie wird also verworfen, und statt selber x oder y gesetzt. Mit diesem x wird nun alles dasjenige unternommen, was man vorher mit der ganzen Zahl gethan; so kann man am Ende die beyden Größen, welche vorher hätten gleich seyn sollen, in eine wahre Gleichung zusammensetzen.

5. Einige Beyspiele sollen das Gesagte begreiflicher machen.

Problem.

Ein Vater ist 57 Jahre alt, und sein Sohn 13. Wie lange wird es noch anstehen, bis der Vater noch so alt als der Sohn seyn wird?

Auflösung.

Ich setze, es stehe noch 20 Jahre an. Ich muß also, um die Probe zu machen, erforschen, wie alt Vater und Sohn nach 20 Jahren seyn werden. Dieß erfahre ich aber, wenn ich 20 sowohl zu 57 als zu 13 addire.

Daher

Daher

$$\begin{array}{r} 57 \\ +\ 20 \\ \hline 77 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 13 \\ +\ 20 \\ \hline 33 \end{array}$$

Nun soll 77 noch so groß seyn, als 33. Ich muß daher, um mich davon zu überzeugen, entweder 77 halbiren oder 33 dupliren. Wähle ich meinetwegen das erste!

$$\text{Also:} \quad \begin{array}{r} 1(1 \\ 77 \\ 22 \end{array} \Big| \; 38\tfrac{1}{2}.$$

Allein $58\frac{1}{2}$ und 33 sind keine gleichen Zahlen; folglich ist 20 falsch. Ich verwerfe nun diese Zahl, und nehme x dafür. Dieses x sowohl zu 57 als zu 13 addirt, giebt:

$$\begin{array}{r} 57 \\ +\ x \\ \hline x + 57 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 13 \\ +\ x \\ \hline x + 13. \end{array}$$

Die erste von diesen Größen hatte ich oben bey der Probe halbirt, also auch hier. Da aber die Division nicht aufgeht, so wird selbe, wie es in der Algebra gewöhnlich ist, bloß angezeigt: $\frac{x+57}{2}$; folglich die Gleichung, welche oben hätte herauskommen sollen:

$\frac{x+57}{2} = x + 13$. Nun die Gleichung ausgeführt!

$$\begin{array}{lrcl} \times 2 & x+57 & = & 2x+26 \\ & -x & & -x \\ \hline & 57 & = & x + 26 \\ & -\ 26 & & -\ 26 \\ \hline & 31 & = & x. \end{array}$$

Es ist demnach 31 Jahre die wahre Zahl.

Eigent=

Eigentliche Probe.

```
 57       13
+ 31     + 31
----------------
 88       44
 88 |
 22 | 44 = 44.
```

6. Ein anders Problem.

Es liegt ein Kapital zu $3\frac{1}{2}$ Procent auf. Nach 9 Jahren machen die Interessen mit Einschluß des Kapitals 7101 fl.; wie groß ist dieses Kapital?

Auflösung.

Setze man, es sey das Kapital 4000 fl. stark. Man sehe durch die Regel Detri, oder durch die Reesische Regel, wie viel es Interessen in 9 Jahren abwerfe:

```
   fl. ? | 4000 fl.)
         | 9 J.   )
(  100   | 3½ fl.
(    1   | 2
     2   | 7
         | 63
         |  20
   ---------------
      1260 fl.
```

Diese 1260 fl. Interessen müßten nun mit dem Kapital 7101 fl. geben. Man addire sie also:

```
  4000
+ 1260
------
  5260,
```

5260, welche Summe aber bey weitem den 7101 fl. nicht gleich ist: Man

Man verwerfe also die 4000 fl. und sage x fl. Daher die Rechnung:

fl. ?	x fl.)
(100	9 J.)
(1	$3\frac{1}{2}$ fl.
2	2
200	7

Antw. $\frac{63x}{200}$ fl.

Dieß zum Kapital x addirt, giebt $x + \frac{63x}{200}$, welche Summe mit 7101 fl. in eine Gleichung gesetzt werden kann:

$$x + \frac{63x}{200} = 7101$$

X200 $200x + 63x = 1420200$

abgek. $263x = 1420200$

: 263 $x = 5400$ fl. das ächte Kapital.

Eigentliche Probe.

fl. ?	5400 fl.)
	9 J.)
(fl. 100	$3\frac{1}{2}$ fl.
(J. 1	
2	7
	27
	189
	9

1701 fl. Zinsen.

Diese zum Kapital addirt: 5400
1701
giebt 7101 fl. wie oben.

8. Und

8. Und noch eins!

Ein Metzger kauft eine Heerde Schafe, und sagt: Wenn mir Jemand durchgehends für 3 Schafe 35 fl. giebt, so gewinn ich 48 fl.; giebt mir aber einer für das Paar 25 fl., so gewinn ich 108 fl. Wie viel sind es Schafe, und wie theuer habe ich eins gekauft?

Auflösung.

Gesetzt, es seyen 100 Schafe, so berechne ich den Gewinn in beyden Fällen folgendermassen:

I.

Sch.	fl.	Sch.
3	35	100

100

22(2
3500 | 1166⅔ Einnahm
3333 | 48 Gewinn

1118⅔ Auslag.

II.

Sch.	fl.	Sch.
2	25	100

100

1
2500 | 1250 fl. Einnahm
222 | 108 Gewinn

1142 fl. Auslag.

Weil

Weil nun die Auslag verschieden herauskömmt, so ist 100 eine falsche Zahl. Man mache daher mit x die nämlichen Rechnungen.

I.

Sch.	fl.	Sch.
3	35	x

Antw. $\frac{35x}{3}$ Einnahme; daher die Auslage $\frac{35x}{3} - 48$.

II.

Sch.	fl.	Sch.
2	25	x

Antw. $\frac{25x}{2}$ Einnahme; daher die Auslage $\frac{25x}{2} - 108$.

Gleichung.

$$\frac{35x}{3} - 48 = \frac{25x}{2} - 108$$

$$\times 3 \quad 35x - 144 = \frac{75x}{2} - 324$$

$$\times 2 \quad 70x - 288 = 75x - 648$$

$$-70x \qquad\qquad -70x$$

$$-288 = 5x - 648$$

$$+648 \qquad\qquad +648$$

$$360 = 5x$$

$$:5 \quad 72 = x.$$

Es waren also 72 Schafe.

Pro:

Probe.

I.

Sch.	fl.	Sch.
3	35	72

```
                    72
                    35
                   ----
                   360
                  216
                 ------
                   1
                  2520 | 840
                   333 | - 48
                       -------
                        792 fl. Auslage.
```

II.

Sch.	fl.	Sch.
2	25	72

```
                    72
                    25
                   ----
                   360
                  144
                 ------
                  1800 |  900
                   2   | - 108
                       -------
                        792 fl. Auslage.
```

9. Ein Paar Probleme zur Uebung.

I.

Eine Mutter ist gegenwärtig 45 Jahre alt, und ihre Tochter 11. Wie lang wird es anstehen, bis die Mutter noch so alt als die Tochter seyn wird? Wie lang, bis sie dreymal älter seyn wird?

II.

Ein Kapital wird zu $2\frac{1}{2}$ Procent 19 Jahr lang ausgeliehen. Nach verfloßner Zeit machen die Zinsen mit dem Kapital eine Summe von $13127\frac{1}{2}$ fl.; wie groß war das Kapital?

III.

Jemand kauft ein Stück Tuch, so, daß er 30 fl. gewinnt, wenn er 4 Ellen für 33 fl. hingiebt, und wenn er 5 Ellen für 42 fl. giebt, so beträgt der Gewinn 36 fl. Wie viel Ellen hatte das Stück Tuch, und wie theuer ist eine gekauft worden?

§. 20.

Von allgemeiner Auflösung algebraischer Probleme.

---

1. Wenn man die Alter zweyer Personen oder zweyer anderer Dinge giebt, und man die Zeit verlangt, in welcher das eine noch so alt, 3, 4, 5mal, überhaupt nmal so alt werden soll, so können diese Alter allgemein durch a und A ausgedrückt werden, und die Gleichung heißt für jeglichen Fall:

$$a + x = \frac{A + x}{n}$$

$$\begin{array}{lr} \times n & an + nx = A + x \\ \text{Vers.} & nx - x = A - an \\ \text{Zers.} & (n-1)x = A - an \\ :(n-1) & x = \dfrac{A - an}{n - 1}. \end{array}$$

2. Durch

2. Durch Hilfe dieser Formel können nun alle hieher einschlägigen Problem gelöset werden. Z. B.

Die Stadt München steht bereits 624 Jahre, ihre Residenz hingegen 200 J. wie lange wird es hergehen, bis München 3mal älter als dessen Residenz seyn wird?

Da nun hier 624 = A

200 = a

und 3 = n ist, so werden in der Formel statt den Buchstaben diese Zahlen eingewechselt.

$$x = \frac{624 - 200 \times 3}{3 - 1} = \frac{624 - 600}{2} = \frac{24}{2}$$

= 12 Jahre.

3. Um zu zeigen, was die negativen Größen in der Algebra für einen Nutzen haben, und wie sie am Ende als Resultate erklärt werden müßen, will ich noch ein Beyspiel nach dieser Formel berechnen.

Hörmann ist 30 Jahr alt, und Rosa seine Schwester 17 Jahr. Wie lang wird es hergehen, bis Hörmann noch so alt als Rosa seyn wird?

$$x = \frac{30 - 17 \times 2}{2 - 1} = \frac{30 - 34}{1} = -4.$$ Das heißt: Die Wirklichkeit dieses Falls hat nicht in der Zukunft, sondern in der entgegengesetzten Zeit, nämlich in der Vergangenheit, Platz. Dieß hat sich schon vor 4 Jahren ereignet. Es verhält sich auch wirklich so. Damals war Hörmann 26 und Rosa 13 Jahre alt.

4. Exem-

4. Exempel zur Uebung.

I.

Die hiesige Pfarrkirche zu Unserliebenfrau steht bereits 331 Jahre, und die Kirche der Theatiner 137. Wie lange wird es noch hergehen, bis eine noch so alt als die andere ist?

II.

Die Pfarrkirche zu St. Peter zählt bereits 623 Jahre; wann wird sie 3mal älter als jene zu Unserliebenfrau seyn?

5. Wenn ein unbekanntes Kapital x zu p Procent n Jahre liegt, und am Ende die Summe der Interessen sammt dem Kapital S genennt wird; so gilt folgender reesischer Ansatz, wo 100 = c gesetzt wird, allgemein:

J. fl. ?	x fl. K.)
	n J.)
(K. fl. c	
(J. 1	p fl. J.

Antw. $\frac{npx}{c}$

also die Gleichung: $x + \frac{npx}{c} = S$

$$cx + npx = cS$$

$$x = \frac{cS}{c + np}.$$

6. Zum Beweise, daß diese Formel allgemein sey, berechne man das nächste beste hieher einschlägige Problem. Z. B.

Ein Kapital liegt zu $3\frac{1}{2}$ Procent 12 Jahre lang und macht nach Verlauf dieser Zeit sammt den Zinsen 11076 fl.: wie groß war es?

Auflösung.

$$x = \frac{100 \times 11076}{100 + 12 \times 3\frac{1}{2}} = \frac{1107600}{100 + 42} = \frac{1107600}{142}$$
$= 7800$ fl.

7. Verkauft man von x Stücken eine gewisse Anzahl n für p fl. und gewinnt in allem g fl.: hinwiederum verkauft man N Stücke für P fl. und gewinnt überhaupt G; so giebt es, um eine Formel zu bekommen, mit §. 19. n. 8. verglichen, folgenden Kalkul.

I.

Losung fl. ? | x St.
n | p fl.

Antw. $\frac{px}{n}$ fl. folglich die eigentliche Auslage $\frac{px}{n} - g$.

II.

Losung fl. ? | x St.
N | P fl.

Antw. $\frac{Px}{N}$, also Auslage $\frac{Px}{N} - G$.

Glei-

Gleichung.

$$\frac{px}{n} - g = \frac{Px}{N} - G$$

$\times n$ $$px - gn = \frac{nPx}{N} - Gn$$

$\times N$ $$Npx - gnN = nPx - GnN$$

Versetzt $$Npx - nPx = gnN - GnN$$

oder $$nPx - Npx = GnN - gnN$$

Zerf. $$(nP - Np)x = nN(G - g)$$

div. $$x = \frac{nN(G-g)}{nP - Np}.$$

8. Es soll nun auch nach dieser Formel ein Problem berechnet werden.

Jemand kauft etliche Pfund Waaren. Giebt er 5 Pfund für einen Konventionsthaler zu 2 fl. 24 kr. hin, so gewinnt er bey der ganzen Parthie 4 fl. 32 kr. Giebt er aber 8 Pfund für einen Dukaten zu 5 fl. 20 kr., so hat er 12 fl. Gewinn. Wie viel Pfunde hat er eingekauft?

Auflösung.

Wenn hier $n = 5$, $p = 2\frac{2}{5}$ fl. $g = 4\frac{8}{15}$ fl. ist, so muß $N = 8$, $P = 5\frac{1}{3}$ und $G = 12$ seyn. Daher

$$x = \frac{5 \times 8\,(12 - 4\frac{8}{15})}{5 \times 5\frac{1}{3} - 8 \times 2\frac{2}{5}} = \frac{40 \times 7\frac{7}{15}}{5\times - \frac{16}{3}\; 8 \times \frac{12}{5}} = \frac{40 \times 7\frac{7}{15}}{7\frac{7}{15}}$$

$= 40$ Pfund.

9. Kömmt gähling bey derley Problemen im ersten Fall des Verkaufes Gewinn, und im zweyten Verlust vor; so muß in der Formel das G gleichfalls negativ gesetzt werden. — Hingegen, wenn das erstemal Verlust, und das zweytemal Gewinn vorkömmt; so muß — g in + g verwandelt werden. — Trift man in beyden Fällen Verlust an, so gehen in der Formel beyde Veränderungen vor. — Hat man in einem Fall weder Gewinn noch Verlust, so gilt das entsprechende $g = 0$. Alles dieß hat seinen Grund in der Verwechslung der Begriffe, oder eigentlicher in der Herleitung der Formel.

10. Problem zur Uebung.

Jemand, der um ein Stück Tuch handelte, wollte immer für 2 Ellen $7\frac{1}{2}$ fl. geben. Ich kann nicht! rief der Kaufmann; denn so verlöre ich baare 6 fl. Ich will Ihnen 3 Ellen für $11\frac{2}{3}$ fl. lassen, so gewinne ich doch wenigstens $1\frac{1}{2}$ fl. Wie viel Ellen hielt das Stück Tuch?

11. Aufgabe. Man soll allgemein bestimmen, wie lang es hergehe, bis zwo Größen g und G gleich groß werden, da jede zu gewissen Zeiten gleiche Zuwachse (augmenta) a und A erhielt, und die eine z. B. G um n solcher Zeiten später anfängt, Zuwachse zu bekommen.

Auflösung.

Man nenne die Zeit, in der sich dieß mit G ereignet, x, so ist die Zeit in Rücksicht der Größe $g = n + x$.

Man

Man rechne nun durch die Proportion oder Reesische Regel, wie viel jede Größe in ihrer Zeit durch ihre Zuwachse gewonnen, so wird man bald die zween gleichen Ausdrücke ihrer Zustände erhalten:

?	x Z.	?	n + x Z.
1	A	1	a
	Antw. Ax		Antw. a (n + x) oder an + ax.

Gleichung.

$$G + Ax = g + an + ax$$

Vers. $Ax - ax = g + an - G$

div. $x = \frac{g + an - G}{A - a}$.

12. Multiplicirt man Nenner und Zähler dieses Bruches durch die Größe − 1, so erhält man im Bedörfungsfall auch eine andere gleichgültige Formel: $x = \frac{G - g - an}{a - A}$.

13. Ein Problem darüber!

Die Baarschaft eines häuslichen Jungens war 3 fl., als er anfieng, wöchentlich 32 kr. zurück zu legen. Nach 18 Wochen fieng auch sein Kammerad an, der 2 fl. hatte, wöchentlich 40 kr. zu ersparen. Wie lang wird es hergehen, bis sie gleich viel besitzen?

Auflösung.

Hier ist 3 fl. oder 180 kr. = g, 32 = a, 18 = n, 2 fl. oder 120 kr. = G und 40 = A; daher

x =

$$x = \frac{180 + 32 \times 18 - 120}{40 - 32}$$

$$x = \frac{60 + 576}{8} = \frac{636}{8} = 79\frac{1}{2} \text{ Wochen.}$$

14. Auch eins zur Uebung!

Jemand reiset mit der Post nach einem sehr entferntem Orte, und macht täglich $8\frac{1}{2}$ Meil. Als diese Person bereits 5 Tage weg war, ritt ein Kourier fort, um sie einzuholen, und machte täglich $11\frac{3}{4}$ Meil. In wie viel Tagen wird dieß geschehen?

Und noch eins!

Wie viel Uhr ist es eigentlich, wenn der Minutenzeiger den Stundenzeiger zwischen 5 und 6 Uhr deckt?

15. Aufgabe. Man soll zwey Waaren von verschiedenen Preisen so untereinander vermischen, daß das Gemisch einen gewissen Preis erhält; wie viel muß von jeder Sorte dazu genommen gewerden? Man setzt aber voraus, daß die beyden Waaren mischbar sind, und daß sie nach der Mischung weder mehr noch weniger Raum einnehmen, als sie vorher einzeln vonnöthen hatten.

Auflösung.

Wir wollen allererst einen solchen individuellen Fall berechnen, und dann zur Allgemeinheit übergehen.

Ein

Ein Gastgeb hat zweyerley Wein; von einem die Maaß 18 und vom andern 48 kr. Er möchte gerne einen Eimer oder 64 Maaß aus diesen beyden Weinen so zusammen mischen, daß die Maaß auf 30 kr. zu stehen kömmt; wie viel muß er von jeder Sorte dazu thun?

Setzen wir von der bessern Sorte x Maaß, folglich von der schlechtern das Uebrige, nämlich 64 — x Maaß. Nun forsche man mittels der Reesischen Regel, oder der Regel Detri, was die beyden Weinportionen, jede für sich, kosten, und was die ganze Mischung beträgt; so muß die Summe des Betrags beyder Weinportionen dem Betrag der Mischung gleich seyn.

kr. ?	x Maaß	kr. ?	64 − x M.	kr. ?	64 M.
1	48 kr.	1	18 kr.	1	30

Antw. 48 x. Antw. 1152 − 18 x. Antw. 1920.

Gleichung.

$$48x + 1152 - 18x = 1920$$

Abgek. $$30x + 1152 = 1920$$

$$-1152 \quad -1152$$

$$30x = 768$$

: 30 $x = 25\tfrac{3}{5}$ Maaß vom bessern; folglich vom schlechtern $64 - 25\tfrac{3}{5} = 38\tfrac{2}{5}$ Maaß.

Nun heiße man allgemein die Menge von Maaßen oder Pfunden, oder Schäffel u. d. gl. (quantitas) die zur Mischung kommen soll $= q$, so kömmt vom schlechtern $q - x$ Maaß zur Mischung. Man heiße ferner den

Preis

Preis einer Maaß, eines Pfundes u. d. gl. von der schlechtern Sorte $=p$, vom bessern hingegen P und den Preis der Mischung $=\pi$, so ändert sich natürlich obige Rechnung in diese um:

kr. ?	x M.	kr. ?	q − x M.	kr. ?	q M.
1	P kr.	1	p	1	π
Antw.	P x	Antw.	p q − p x	Antw.	π q.

Gleichung.

$$Px + pq - px = \pi q$$

Vers. $$Px - px = \pi q - pq$$

oder $$(P - p)x = (\pi - p)q$$

(P − p) $$x = \frac{(\pi - p)q}{P - p}.$$

16. **Praktische Anwendung.**

Ein Goldschmied hat 8löthiges und 14löthiges Silber. Er soll 3 Mark oder 48 Loth aus selben so zusammenschmelzen, daß 10löthiges daraus werde. Wie viel muß er von jedem Silber nehmen?

Auflösung.

Hier ist $q = 48$, $p = 8$, $P = 14$ und $\pi = 10$. Daher:

$$x = \frac{(10 - 8)\,48}{14 - 8} = \frac{2 \times 48}{6} = 2 \times 8 = 16.$$

Antw. 16 Loth oder eine Mark vom bessern Silber, und das Uebrige nämlich 2 Mark vom schlechtern.

17. Es

17. Es kann sich fügen, daß in einem Problem dieser Art die Anzahl der Pfunde, Maaße u. d. gl., die von der bessern Sorte zur Mischung kommen, gegeben sey; daß aber eine andere von den übrigen vieren als unbekannte Größe vorkömmt. In solchen Fällen muß die Formel durch eine kleine Kalkulation vorläufig darnach eingerichtet werden. Ein Beyspiel soll das Gesagte erläutern:

Ein Krämer hat zweyerley Oel gemischt, und findet, daß das Pfund auf 20 kr. kömmt. Die Mischung beträgt 50 Pfund, und es wurden von der bessern Sorte, wo das Pfund 24 kr. kostete, 30 Pfund genommen; wie hoch ist wohl das Pfund von der schlechtern Gattung angeschlagen?

Auflösung.

Hier ist p unbekannt, und x bekannt. Wir wollen daher die Anzahl der Pfunde von der bessern Oelsorte statt durch x vielmehr durch n und in das p durch x ausdrücken. Die Formel heißt dann $n = \frac{(\pi - x)q}{P - x}$, wo der Werth von x erst gesucht werden muß.

$$n = \frac{(\pi - x)\,q}{P - x)\,q}$$

× (P − x) $\quad Pn - nx = \pi q - qx$

Vers. $\quad qx - nx = \pi q - Pn$

oder $\quad (q - n)x = \pi q - Pn$

: (q − n) $\quad x = \frac{\pi q - Pn}{q - n}$.

Nun

Nun die Werthe der Buchstaben aus dem Problem gesetzt: $x = \frac{20 \times 50 - 24 \times 30}{50 - 30} = \frac{1000 - 720}{20}$

$= \frac{280}{20} = 14\ X.$

18. Zum Beschluß dieses Abschnittes noch zwey andere Probleme, wofür man ebenfalls allgemeine Formeln suchen kann.

I.

In einer Goldbörse befinden sich 2656 fl. in Dukaten zu 5 fl. 20 kr. und Karolinen zu 11 fl. Sie wiegt genau $3\frac{3}{4}$ Pfund. Wie viel sind es Dukaten, wie viel Karoline, da bekannt ist, daß 16080 Dukaten eben so gut als 5760 Karolinen auf einen baierischen Zentner gehen?

I.

Auf drey Schneidmühlen werden 590 Bretter bestellt. Die erste ist im Stande in 4 Tagen 30 Bretter zu liefern, die zweyte in 3 Tagen 20 Bretter, und die dritte in 2 Tagen 11 Bretter. Sie fangen alle sogleich an der bestellten Arbeit an. Nach wie viel Tagen können diese Bretter abgeholt werden?

§. 21.

§. 21.

Von der Art und Weise, wie mehrere unbekannte Größen eines Problems durch Gleichungen gefunden werden.

1. Ist man im Stande, aus einem Problem so viele Gleichungen herauszubringen, als viele unbekannte Größen sich vorfinden, so daß sie alle wesentlich von einander unterschieden sind, dann ist das Problem bestimmt, das heißt: Es ist auf die vorgelegte Frage nur Eine Antwort möglich. Im widrigen Fall ist das Problem unbestimmt, und man kann auf die gegebne Frage öfter, ja sogar in den meisten Fällen unendlichmal antworten.

2. Man hat mehrere Wege, dergleichen Probleme aufzulösen. Die vornehmsten sind die Substitution und Komparation.

3. Unter Substitution versteht man ein Verfahren, wodurch der Werth einer unbekannten Größe in einer Gleichung gesucht, und in der andern Gleichung statt eben dieser Größe gesetzt wird, vermög dem Grundsatze: Gleiches kann für gleiches gesetzt werden.

Es seyen z. B. die zwo Gleichungen gegeben:

I.

I. II.

$$\frac{b+x}{y} = a - 1. \qquad 2x - a = c - y.$$

Man suche nun in der ersten Gleichung für x seinen Werth, oder, wie man sagt, sein Aequivalent.

$$\frac{b+x}{y} = a - 1$$

$\times y$ $\qquad b + x = ay - y$

Vers. $\qquad x = ay - y - b.$

Und substituire dieses Aequivalent in der zweyten Gleichung. Man erhält:

$$2(ay - y - b) - a = c - y$$

oder $\qquad 2ay - 2y - 2b - a = c - y$

Vers. $\qquad 2ay - y = a + 2b + c$

oder $\qquad (2a - 1)y = a + 2b + c$

$:(2a-1)$ $\qquad y = \frac{a+2b+c}{2a-1}.$

Man hat nun für y einen Werth in lauter bekannten Ausdrücken. Um ihn nun auch für x zu bekommen, substituire man in $x = ay - y - b$ statt y sein Aequivalent, und man erhält: $x = \left(\frac{a+2b+c}{2a-1}\right)a - \frac{a-2b-c}{2a-1} - b$

und kürze ab:

$$x = \frac{a^2 - a + 2ab + ac - 2b - c}{2a-1} - b.$$

4. Eben so leicht wäre es auch gewesen, wenn man in einer dieser beyden Gleichungen ein Aequivalent für y gefunden, und dasselbe in der andern Gleichung substituirt hätte. Es wäre dann zuerst der Werth von x in bekannten Ausdrücken zum Vorschein gekommen.

5. Um die Komparation anzuwenden, muß man ein und die nämliche unbekannte Größe so oft in den vorhandenen Gleichungen in äquivalenten Ausdrücken zu bestimmen suchen, als es nur möglich ist, und dann diese Ausdrücke unter sich vergleichen, das heißt, in neue Gleichungen zusammenstellen, so lange, bis eine der unbekannten Größen in lauter bekannten Ausdrücken bestimmt ist. Dieß Verfahren gründet sich auf das Axiom: Sind zwey Größen einer dritten gleich, so sind sie auch unter sich gleich. Um dann auch die übrigen unbekannten Größen so zu bestimmen, muß man sich doch allemal wieder der Substitution bedienen. — Man behandle die obigen zwo Gleichungen auch nach der Komparation.

I.

$$\frac{b+x}{y} = a - 1$$

xy $\quad b + x = ay - y$

Vers. $\quad x = ay - b - y$

II.

II.

$$2x - a = c - y$$

Verſ. $$2a = 2 + c - y$$

: 2 $$x = \frac{a + c - y}{2}.$$

Nun dieſe Werthe von x in ein neue Gleichung zuſammengeſtellt.

III.

$$\frac{a + c - y}{2} = ay - b - y$$

× 2 $$a + c - y = 2ay - 2b - 2y$$

Verſ. $$a + 2b + c = 2ay - y \text{ oder } = (2a - 1)y$$

:(2a−1) $$\frac{a + 2b + c}{2a - 1} = y.$$

Will man nun auch x in bekannten Ausdrücken, ſo muß, wie vorher, wieder ſubſtituirt werden.

6. Es laſſen ſich manchmal auch andere Vortheile anbringen, um eine unbekannte Größe aus den Gleichungen hinaus zu ſchaffen. Es kann dieß zuweilen geſchehen, wenn man zwo Gleichungen von einander abzieht, oder zuſammen addirt, oder durch einander dividirt u. ſ. f. Es müßen aber zuweilen die Gleichungen zu dieſen Vortheilen zubereitet werden. So z. B. wenn man die erſte von unſern gegebnen zwo Gleichungen durch y multiplicirt, und die zweyte durch 2 dividirt, ſo laſſen ſie ſich mit

Vortheil von einander abziehen; weil auf diese Weise das x aus der Gleichung hinausfällt. Hier ist die Behandlung:

$$\text{I. } \frac{b+x}{y} = a - 1. \qquad \text{II. } 2x - a = c - y$$

$$\times y \quad b + x = ay - y \qquad :2 \quad x - \frac{a}{2} = \frac{c - y}{2}$$

$$x - \frac{a}{2} = \frac{-c \mp y}{2}$$
$$- \quad +$$

$$\frac{a}{2} + b = ay - y - \frac{c+y}{2}$$

$$\times 2 \quad a + 2b = 2ay - 2y - c + y$$

Verſ. u. abgek. $a + 2b + c = 2ay - y$ oder $= (2a - 1)y$

$$:(2a - 1) \quad \frac{a + 2b + c}{2a - 1} = y.$$

Das x muß wieder durch die Substitution bestimmt werden.

7. Aufgabe.

Es sey die Summe und die Differenz zweyer Größen gegeben, man soll daraus die Größen selbst bestimmen?

Auflösung.

Es heiße die größere Größe = x und die kleinere y, die Summe = S und die Differenz = d. Daher

I.

$$\begin{array}{lrl} \text{I.} & x+y & = S \\ \text{addirt} & x-y & = d \\ \hline & 2x & = S+d \\ :2 & x & = \frac{S+d}{2}. \end{array}$$

Diese Gleichung von der ersten abgezogen:

$$\begin{array}{rl} x+y & = S \\ x & = \frac{S}{2} + \frac{d}{2} \\ - & \quad - \quad - \\ \hline y & = \frac{S}{2} - \frac{d}{2} \text{ oder } \frac{S-d}{2}. \end{array}$$

Man erhält demnach die größere Größe, wenn man zur halben Summe die halbe Differenz addirt; und die kleinere, wenn man diese beyden Hälften von einander abzieht.

8. Praktische Anwendung dieses Satzes.

Zwey Geschwisterte sind mit einander 99 Jahre alt. Der Bruder ist aber um 9 Jahr älter als die Schwester; wie alt ist jedes?

Auflösung.

$\frac{99+9}{2} = \frac{108}{2} = 54$ Jahre der Bruder.

$\frac{99-9}{2} = \frac{90}{2} = 45$ Jahre die Schwester.

9. Problem von drey unbekannten Größen.

Jemand kauft 3 Pferde. Der Werth des ersten macht mit dem halben Werthe der beyden übri-

übrigen 25 Karoline. Der Werth des zweyten mit dem dritten Theil der zwey andern betragt 26 Karoline. Endlich der Werth des dritten Pferdes macht mit dem halben Werth der zwey andern 29 Karoline. Wie theuer war jedes insonderheit?

Auflösung.

Es koste das erste Pferd x, das zweyte y und das dritte z fl. so entstehen folgende 3 Gleichungen, welche wir durch die Komparation entwickeln wollen.

I. $x + \frac{y+z}{2} = 25$ | $2x + y + z = 50$; $z = 50 - 2x - y$

II. $y + \frac{x+z}{3} = 26$ | $3y + x + z = 78$; $z = 78 - x - 3y$

III. $z + \frac{x+y}{2} = 29$ | $z = 29 - \frac{x-y}{2}$.

IV.

$$50 - 2x - y = 78 - x - 3y$$
$$-50 + 2x + 3y \quad -50 + 2x + 3y$$
$$2y = 28 + x$$
$$y = \frac{28+x}{2}.$$

V.

$$78 - x - 3y = 29 - \frac{x-y}{2}$$
$$\times 2 \qquad 156 - 2x - 6y = 58 - x - y$$
$$-58 + x + 6y \quad -58 + x + 6y$$
$$98 - x = 5y$$
$$:5 \qquad \frac{98-x}{5} = y.$$

VI.

$$\frac{28+x}{2} = \frac{98-x}{5}$$

$$\times 2 \times 5 \qquad 140 + 5x = 196 - 2x$$

$$-140 + 2x \quad -140 + 2x$$

$$7x = 56$$

$$:7 \qquad x = 8$$ Karoline das erste Pferd.

Nun zurück substit. z. B. zu Ende der IV. Gleichung

$$y = \frac{28+x}{2}$$

$$y = \frac{28+8}{2} = \frac{36}{2} = 18$$ Karol. das 2te Pferd.

Endlich in der ersten Gleichung $z = 50 - 2x - y$

$$z = 50 - 16 - 18$$

$= 50 - 34 = 16$ Karoline das dritte Pferd.

Probe.

Erstes	zweytes	drittes Pferd
8	18	16
9	$2\frac{2}{3}$	9
8	$5\frac{1}{3}$	4
25	26	29.

9. Manchmal fügt es sich, daß nicht alle unbekannten Größen in jeder Gleichung vorkommen. Man sucht demnach, wenn man dergleichen Probleme durch Komparation behandeln will, so viele gleichgültige Ausdrücke für jede solche Größe, als es möglich ist, und stellt sie in neue Gleichungen zusammen. Die Sache ist demungeachtet immer thunlich. Man sehe dieß gleich im folgenden

10. Prob.

10. Problem.

Ein Philolog kauft drey lateinische Werke: Virgil, Livius und Cicero. Die ersten zween kosten miteinandet $4\frac{1}{6}$ fl., die letzten zween $6\frac{1}{2}$ fl., Virgil und Cicero aber $5\frac{1}{3}$ fl. Was kostete jeder?

Auflösung.

V.	L.	C.
x	y	z

$$\begin{array}{ll} \text{I.} & x + y = 4\tfrac{1}{6} = \tfrac{25}{6} \\ \text{II.} & y + z = 6\tfrac{1}{2} = \tfrac{13}{2} \\ \text{III.} & x + z = 5\tfrac{1}{3} = \tfrac{16}{3} \end{array} \left\} \begin{array}{l} {}^{*}\; y = \tfrac{25}{6} - x \\ z = \tfrac{13}{2} - y \\ z = \tfrac{16}{3} - x. \end{array} \right.$$

IV.

$$\frac{13}{2} - y = \frac{16}{3} - x$$

$$\times 2 \qquad 13 - 2y = \frac{32}{3} - 2x$$

$$\times 3 \qquad 39 - 6y = 32 - 6x$$

$$\text{Vers.} \qquad 6x + 39 = 32 + 6y$$

$$\begin{array}{r} -32 \quad -32 \\ \hline 6x + 7 = 6y \end{array}$$

$$:6 \qquad \frac{6x+7}{6} = y.$$

V.

$$\frac{6x+7}{6} = \frac{25}{6} - x$$

$$\times 6 \qquad 6x + 7 = 25 - 6x$$

$$\begin{array}{r} +6x - 7 \quad -7 + 6x \\ \hline 12x = 18 \end{array}$$

$$:12 \qquad x = 1\tfrac{1}{2} \text{ fl.}$$

Nun zurück substit. und zwar in der ersten Gleichung

$$y = \frac{25}{6} - \frac{3}{2} = \frac{25}{6} - \frac{9}{6} = \frac{16}{6} = 2\frac{2}{3} \text{ fl.}$$

Und in der dritten:

$$z = \frac{16}{3} - \frac{3}{2} = \frac{32 - 9}{6} = \frac{23}{6} = 3\frac{5}{6} \text{ fl.}$$

11. Aus diesen wenigen Problemen ist es nun leicht, mittels Analogie den Schluß zu machen, wie andere Probleme von mehrern unbekannten Größen aufzulösen sind. In meinem größern Werke sind viele dergleichen Aufgaben umständlich bearbeitet.

12. Probleme zur Uebung.

I.

Hieher gehört das erste Problem §. 1.

II.

Ach, ich habe 9 fl. 56 kr. an meinem Golde verlohren! klagte ein Filz im Zirkel seiner Bekannten, da die Dukaten um 6 und die Karoline um 8 kr. abgeschlagen hatten. Einer derselben jagte ihm einen neuen Schrecken ein, als er ihn versicherte, daß die Dukaten noch um 5 kr. und die Karoline um 7 kr. abschlagen würden. Das gieng gut! rief er voll Unmuth aus, da wären wieder 8 fl. 32 kr. beym T — — —! Wie viel hatte er Dukaten, und wie viel Karoline?

III.

Rath' einmal, Alter, wie theuer ich eingekauft! fragte ein junger Landkavalier seinen Kut-

Kutscher, als er voller Freude mit einer neuen Postchaise, einem Reitpferde und einem Jagdhunde aus der Stadt nach Hause kam. Dieser rieth nach langen Besehen bey der Chaise auf 225 fl., beym Pferde auf 134 fl. und beym Hund 48 fl. Ueberall zu viel gerathen! rief der Freudentrunkne, und zwar bey der Chaise um $\frac{1}{8}$ des Preises vom Pferde und $\frac{1}{4}$ vom Hunde. Beym Pferd um $\frac{1}{20}$ der Chaise und $\frac{1}{10}$ des Hundes, und beym Hund $\frac{1}{40}$ der Chaise und des Pferdes. Wie hätte der Alte rathen sollen?

§. 22.

Von unbestimmten Problemen.

1. Man versteht darunter, wie schon gesagt worden, solche Probleme, die durch mehrere Zahlen beantwortet werden können. Doch giebt es hie und da Fälle, welche anfänglich unbestimmt scheinen, im Grunde aber doch bestimmt sind.

2. Es kömmt hier meistens darauf an, daß man die vorgelegte Frage in lauter ganzen Zahlen beantworte; wozu die Algebra einen besondern Weg einschlägt. Ein und anders Beyspiel mag uns davon nähere Aufschlüsse geben.

3. Zwey

3. Zwey Probleme.

a) Eine Köchinn bekömmt von ihrer Herrschaft 19 fl., mit dem Auftrage, Gänse und Enten dafür einzukaufen. Auf dem Markt trifft sie einen Handel, daß sie für 29 kr. eine Gans und für 17 kr. eine Ente überkömmt; wie viel Stücke muß sie von jeder Gattung nehmen, daß das Geld rein aufgeht?

Auflösung.

Wenn die Anzahl der Gänse = x und die der Enten = y ist, so hat diese einzige Gleichung statt:

$29x + 17y = 19 \times 60 = 1140$ und $x = \frac{1140 - 17y}{29}$.

Nun könnte man für y eine Zahl annehmen, welche man wollte; nur so viel nicht, daß diese Zahl mit 17 multiplicirt größer als 1140 wird; weil dadurch die Antwort negativ ausfallen würde. Allein es soll zugleich auch die Division durch 29 aufgehen. Man dividire demnach den Ausdruck $\frac{1140 - 17y}{29}$ wirklich, so erhält man

$$x = 39 + \frac{9 - 17y}{29}.$$

Weil nun dieser Bruch in einer ganzen Zahl ausgedrückt werden soll, so setze man ihn = — A und bestimme y. Kömmt wieder ein Bruch zum Vorschein, so setze man ihn = B und fahre so lang fort, bis so ein Bruch in einer ganzen Zahl ausgedrückt ist, oder bis die Unmöglichkeit einer Foderung erhellet.

I.

$$\frac{9-17y}{29} = -A$$

$$\frac{-9+17y}{29} = A$$

$$y = \frac{29A+9}{17} = A + \frac{12A+9}{17}.$$

II.

$$\frac{12A+9}{17} = B$$

$$A = \frac{17B-9}{12} = B + \frac{5B-9}{12}.$$

III.

$$\frac{5B-9}{12} = C$$

$$B = \frac{12C+9}{5} = 2C+1+\frac{2C+4}{5}.$$

IV.

$$\frac{2C+4}{5} = D$$

$$C = \frac{5D-4}{2} = 2D-2+\frac{D}{2}.$$

V.

$$\frac{D}{2} = E$$

$$D = 2E.$$

Nun

Nun lassen sich alle vorige Gleichungen bis auf y und x zurück so in E Werthen ausdrücken, daß der Bruch überall verschwindet. Denn

$$C = \frac{5 \times 2E - 4}{2} = 5E - 2.$$

$$B = \frac{12 \times (5E - 2) + 9}{5} = 12E - 3.$$

$$A = \frac{17(12E - 3) - 9}{12} = 17E - 5.$$

Endlich $y = \frac{29(17E - 5) + 9}{17} = 29E - 8$

und $x = \frac{1140 - 17(29E - 8)}{29} = 44 - 17E.$

Nun lasse man E = 1 gelten, so ist

x = 27 Gänse

und y = 21 Enten.

Nimmt man E = 2 an, so ist

x = 10 Gänse

und y = 50 Enten.

Wenn man hingegen E = 3 oder größer annimmt, so wird der Fall allemal unmöglich seyn; weil negative Zahlen erhalten werden.

b) Einer ist dem andern 3 fl. schuldig. Sie haben aber keine andere Münz als Konventions- und Laubthaler. Wie kann diese Schuld bezahlt werden?

Auf-

Auflösung.

Man braucht x Konventions- und y Laubthaler. Daher

$$2\tfrac{2}{5}x + 2\tfrac{3}{4}y = 3$$

oder $\quad \frac{12x}{5} + \frac{11y}{4} = 3$

$\times 5 \quad 12x + \frac{55y}{4} = 15$

$\times 4 \quad 48x + 55y = 60$

$$x = \frac{60 - 55y}{48} = 1 - y + \frac{12 - 7y}{48}.$$

I.

$$\frac{12 - 7y}{48} = -A$$

$\times 48 \quad 12 - 7y = -48A$

veränd. $\quad 7y - 12 = 48A$

$$y = \frac{48A + 12}{7} = 6A + 1 + \frac{6A + 5}{7}.$$

II.

$$\frac{6A + 5}{7} = B$$

$$A = \frac{7B - 5}{6} = B + \frac{B - 5}{6}.$$

III.

$$\frac{B - 5}{6} = C$$

$$B = 6C + 5.$$

Nun zurück substituirt!

$$A = \frac{7(6C+5)-5}{6} = 7C+5$$

$$y = \frac{48(7C+5)+12}{7} = 48C+36$$

und $$x = \frac{60-55(48C+36)}{48} = -40-55C.$$

Es sey $C=0$, so ist $y=36$ Laubthaler und $x=-40$ Konventionsthaler. Das heißt: Der Schuldner muß 36 Laubthaler bezahlen, und der andere muß 40 Konventionsthaler heraus geben, so werden 3 fl. bezahlt seyn. Läßt man $C=1$ gelten, dann ist

$y = 84$ Laubthaler

und $x = -95$ Konventionsthaler, und so ohne Ende fort.

4. Zur Uebung.

I.

Es werden jemanden 200 fl. geschickt, mit der Bitte, dafür Hirse und Rollgerste einzukaufen. Wie viel muß von jeder Gattung genommen werden, damit das Geld rein aufgeht, wenn der Metzen Hirse 5 fl. 20 kr. und der Metzen Rollgerste 8 fl. 30 kr. kostet?

II.

Es möchte jemand 500 fl. in Gold hinterlegen. Er kann aber nichts anders als Dukaten zu 5 fl. 20 kr. und Karoline zu 11 fl. einwechseln; wie viel muß er sich von jeder Sorte geben lassen?

§. 23.

§. 23.

Würdenlehre.

1. Eine Größe zu einer Würde erheben, heißt ein Produkt von lauter gleichen Faktoren herstellen. Die Anzahl derselben giebt den Exponenten der Würde; so ist $x \times x \times x = x^3$.

2. Eine Wurzel aus einer Größe ausziehen, ist das Gegentheil, und heißt dieselbe durch die Division in etliche gleiche Faktoren zerlegen, wo dann ein solcher Faktor die Wurzel genennt wird. Die Anzahl dieser gleichen Faktoren ist wieder der Wurzelexponent, und wird in das Zeichen der Wurzel $\sqrt{}$, welches man vor die Größe setzt, hineingeschrieben. Der Exponent 2 wird insgemein weggelassen, und schon beym leeren Zeichen darunter verstanden. Es werden demnach $343 = 7 \times 7 \times 7$ und $a^2 = a \times a$ so ausgedrückt: $\sqrt[3]{343} = 7$ und $\sqrt{a^2} = a$.

3. Da die Einheit weder durch sich selbst multiplicirt, noch durch die Division in Faktores zerlegt werden kann, so ist jede Würde und jede Wurzel aus 1 sich selbst gleich.

4. So wohl die Exponenten einer Würde als die einer Wurzel lassen sich nach Erfoderniß der Umstände sehr mannig=

mannigfaltig ausdrücken. Sie können Zahlen oder Buchstaben, ganz oder gebrochen, positiv oder negativ, einfach oder zusammengesetzt, reel oder sogar null seyn. Daher das ziemlich weite Gebiet der Würdenlehre.

5. Würden wie auch Wurzeln von gleichen Urgrößen und Exponenten lassen sich eben darum, weil sie im strengsten Sinne gleichartig sind, bey der Addition und Subtraktion abkürzen. So z. B. ist $7a^4 + 3a^4 = 10a^4$, $5x^3 - x^3 = 4x^3$, $3\sqrt{z} + \sqrt{z} = 4\sqrt{z}$, $9\sqrt[5]{m} - 2\sqrt[5]{m} = 7\sqrt[5]{m}$. Im widrigen Fall sind die Abkürzungen unmöglich, z. E. $\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{x}$ oder $x^3 + x^2$ u. s. f.

6. Beyspiele zur Uebung.

I. $8a^n + 11a^n$. II. $3\sqrt[n]{x^4} + \sqrt[n]{x^4}$. III. $12z^{\frac{1}{4}} - 5z^{\frac{1}{4}}$. IV. $9\sqrt[n]{x^m} - 2\sqrt[n]{x^m}$.

7. Würden von gleichen Urgrößen werden miteinander multiplicirt, wenn man ihre Exponenten nach algebraischen Gesetzen addirt. Der Grund dieses Verfahrens ist schon §. 7. n. 7. angegeben worden. z. E. $a^2 \times 2a^{-3} = 2a^{-1}$, $3x^{\frac{1}{3}} \times 6x^{\frac{2}{5}} = 18x^{\frac{11}{15}}$, $\frac{1}{2}z^m \times 10z^n = 5z^{m+n}$.

8. Beyspiele zur Uebung.

I. $4c \times 3c^3$. II. $9b^{-1} \times 2b^3$. III. $a^{-1} \times \frac{1}{4}a^{-2}$. IV. $\frac{1}{2}x^{\frac{1}{3}} \times \frac{3}{5}x^{\frac{2}{9}}$. V. $3y^{\frac{a}{m}} \times 5y^{\frac{a}{x}}$.

9. Ei-

9. Eine Würde wird durch eine andere von gleicher Urgröße dividirt, wenn man den Exponenten des Divisors von dem des Dividends nach algebraischen Gesetzen subtrahirt. Auch dieses Verfahren wurde §. 8. n. 4. gerechtfertigt. Es ist demnach $8x^7 : 2x^3 = 4x^4$, $5a : a^{-1} = 5a^2$, $12b^{-2} : 4b = 3b^{-3}$, $6c^{-3} : 2c^3 = 3c^0$, $9z^m : \frac{1}{2}z = 18z^{m-1}$, $\frac{1}{4}y^{\frac{1}{2}} : \frac{1}{8}y^{-\frac{1}{2}} = 2y : x^m : x^n = x^{m-n}$.

10. Beyspiele zur Uebung.

I. $10m^3 : 2m$. II. $8x^9 : 3x^{\frac{1}{3}}$. III. $4y^{-1} : 4y$. IV. $\frac{1}{2}a : \frac{3}{4}a^{-3}$. V. $5z^{-2} : 10z^{-3}$, $7b^{\frac{m}{n}} : \frac{1}{3}b^{\frac{1}{m}}$.

11. Umgekehrt können demnach auch Würden, die irgend eine Differenz zweyer Größen zum Exponenten haben, in Brüche verwandelt werden. Es ist z. B.

$$x^{m-n} = \frac{x^m}{x^n}.$$

12. Jede Größe zur Nullwürde erhoben ist $= 1$. Denn weil man statt $0 = m - m$ setzen darf, so ist

$$x^0 = x^{m-m} = \frac{x^m}{x^m} = 1.$$

13. Hieraus folgt, daß man solche Größen zur Null erhoben nach Belieben zu andern Größen als Faktoren hin-

stellen,

stellen, oder als Nenner eines Bruches setzen kann. Es ist $a = ax^0$, $m = \frac{m}{z^0}$ u. s. f.

14. Größen mit negativen Exponenten sind Brüchen gleich, die die Einheit zum Zähler und zum Nenner die nämliche Größe, aber mit positiven Exponenten haben. Denn weil $m - 2m = -m$, so ist $x^{-m} = x^{m-2m}$

$$: x^m$$

$$= \frac{x^m}{x^{2m}} = \frac{1}{x^m}.$$

15. Man kann demnach auch wechselsweise gebrochenen Größen ihre Bruchgestalt benehmen, indem man den Nenner ausstreicht, und ihn mit negativen Exponenten als Faktor zum Zähler hinstellt. Z. B. $\frac{a}{b} = ab^{-1}$,

$$\frac{x}{2y^{m+n}} = x \times 2^{-1} y^{-m-n} = 2^{-1} xy^{-m-n}.$$

16. Hat gähling der Nenner selbst einen negativen Exponenten, so wird er zum Zähler mit positiven Exponenten hinaufgesetzt. Z. E. $\frac{a}{x^{-m}} = ax^m$; denn $\frac{a}{x^{-m}}$

$$= a : \frac{1}{x^m} = \frac{a}{1} \times \frac{x^m}{1} = ax^m.$$

17. Es soll nach diesen Sätzen folgenden Ausdrücken eine andere Gestalt ertheilt werden:

I. $\frac{x^0}{a^2}$. II. $\frac{(a-1)^0}{3^m}$. III. x^{-3}. IV. $\frac{b}{a^2}$. V. $\frac{cx}{y^{-8}}$.

VI. $\frac{x^{-2}}{z^{-3}}$.

18. Weil die Würden a^2, c^3, x^m u. s. f. dadurch entstehen, wenn man 1, den Exponenten der Urgröße oder der ersten Würde a^1, c^1, x^1 durch 2, 3, m u. s. w. multiplicirt; so wird jede Größe zu was immer für einer Würde erhoben, wenn man ihren Exponenten mit dem neuen Exponenten multiplicirt. Dieß beweiset auch nebenher die Induktion; denn z. B. $(a^2)^3 = a^2 \times a^2 \times a^2 = a^6$, das ist $a^{2 \times 3}$; und so von allen andern Fällen zu reden. Also überhaupt $(x^m)^n = x^{mn}$.

19. Es lassen sich nun folgende Rechnungen leicht einsehen: $(a^5)^2 = a^{10}$, $(ax^2)^3 = a^3x^6$, $(3y)^2 = 9y^2$, $(z^{-2})^{-n} = z^{2n}$, $(x^5)^{\frac{1}{3}} = x^{\frac{5}{3}}$, $(y^2 z^{\frac{3}{4}})^{\frac{2}{5}} = y^{\frac{4}{5}} z^{\frac{6}{20}}$ oder $y^{\frac{4}{5}} z^{\frac{3}{10}}$, $\left(7a^{\frac{m}{x}}\right)^{\frac{n}{3}} = 7^{\frac{n}{3}} a^{\frac{mn}{3x}}$.

20. Zur Uebung.

I. $(c^7)^3$. II. $(by^3)^5$. III. $(2z)^3$. IV. $(c^{-3})^{-2}$. V. $(y^3)^{\frac{2}{5}}$. VI. $(a^2 z^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{4}}$.

21. Da das Wurzelausziehen dem Erheben zu Würden schnurgerade entgegen gesetzt ist, und also eine Operation die Probe von der andern macht; so muß auch die Behandlung der Exponenten beym Wurzelausziehen der Behandlung derselben beym Erheben zu Würden entgegengesetzt seyn. Es wird nämlich in diesem Falle der Exponent der Würde durch den der Wurzel dividirt. Denn oben ist gezeigt worden, daß $(a^2)^3 = a^6$ oder $= a^{2 \times 3}$ sey. Will man nun mittels der Probe aus a^6 wieder die dritte Wurzel a^2 erhalten, so kann dieß lediglich nicht anders geschehen, als durch die Division des Exponenten 6 durch den Wurzelexponenten 3. Folglich wieder überhaupt $\sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}}$.

22. Es kann demnach das Wurzelzeichen von jeder Größe dadurch weggebracht werden, wenn man den Exponenten der Würde durch den des Wurzelzeichens dividirt. So ist z. B. $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$, $\sqrt[4]{a^4} = a$, $\sqrt[n]{z^{n-1}} = z^{\frac{n-1}{n}}$, $\sqrt[-2]{x^{-8}} = x^4$, $\sqrt[n]{ax^m} = a^{\frac{1}{n}}\, x^{\frac{m}{n}}$, $\sqrt[\frac{3}{4}]{y^{\frac{5}{7}}} = y^{\frac{5}{7} : \frac{3}{4}} = y^{\frac{5}{7} \times \frac{4}{3}} = y^{\frac{20}{21}}$.

23. Zur Uebung.

I. $\sqrt{y}$. II. $\sqrt[3]{a^3}$. III. $\sqrt[m]{y^{m+1}}$. IV. $\sqrt[-3]{x^{-6}}$. V. $\sqrt[r]{b y^n}$. VI. $\sqrt[\frac{2}{3}]{z^{\frac{1}{2}}}$.

23. Wechselsweise können also eben so gut, wenn es die Umstände so fodern, Würden mit gebrochnen Exponenten in Wurzelausdrücke verwandelt werden. So ist z. E. $a^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{a^2}$, $z^{\frac{1}{2}} = \sqrt{z}$, $a x^{\frac{m+1}{n}} = a\sqrt[n]{x^{m+1}}$, $a^{\frac{1}{m}} x^{\frac{3}{m}} = \sqrt[m]{a x^3}$.

24. Zur Uebung.

I. $c^{\frac{1}{3}}$. II. $y^{\frac{5}{9}}$. III. $b z^{\frac{3}{4}}$. IV. $x^{\frac{n-1}{m}}$.

25. So wie Würden zu neuen Würden erhoben werden können, so giebt es auch Fälle, wo gefodert wird, daß man aus einer Wurzelgröße noch eine Wurzel ausziehen soll; z. B. $\sqrt[3]{\sqrt[5]{a^2}}$ oder allgemein $\sqrt[m]{\sqrt[n]{x^r}}$. Hier dörfen nur die beyden Wurzelexponenten durcheinander multiplicirt, und ein Wurzelzeichen weggelassen werden. Es ist demnach $\sqrt[3]{\sqrt[5]{a^2}} = \sqrt[15]{a^2}$ und $\sqrt[m]{\sqrt[n]{x^r}} = \sqrt[mn]{x^r}$; denn $\sqrt[m]{\sqrt[n]{x^r}} = \sqrt[m]{x^{\frac{r}{n}}} = x^{\frac{r}{mn}} = \sqrt[mn]{x^r}$.

26. Auch mehrere Wurzelzeichen von dieser Art lassen sich durch die Multiplikation in ein einziges zusammen schmelzen. Z. E. $\sqrt{\sqrt[3]{\sqrt{\sqrt[4]{x^m}}}} = \sqrt[24n]{x^m}$.

27. Zur Uebung.

I. $\sqrt[3]{\sqrt[\frac{1}{4}]{b^5}}$. II. $\sqrt[-2]{\sqrt[-3]{x}}$. III. $\sqrt[m]{\sqrt[r]{\sqrt{a^4}}}$. IV. $\sqrt[\frac{1}{2}]{\sqrt[\frac{3}{4}]{\sqrt[n]{\sqrt[\frac{1}{n}]{c^m}}}}$.

28. Fügt es sich zuweilen, daß sich der Exponent der Würde, und der der Wurzel durch eine dritte Größe ohne Rest dividiren lassen, so kann allemal verkleinert werden. Z. E. $\sqrt[6]{y^4} = \sqrt[3]{y^2}$ oder allgemein $\sqrt[mn]{x^{mr}} = \sqrt[n]{x^r}$. Denn $\sqrt[mn]{x^{mr}} = x^{\frac{mr}{mn}} = x^{\frac{r}{n}} = \sqrt[n]{x^r}$.

29. Zur Uebung.

I. $\sqrt[9]{x^3}$. II. $\sqrt[\frac{x}{4}]{y^{\frac{x}{5}}}$. III. $\sqrt[4]{z^{2m}}$. IV. $\sqrt[m5]{x^{\frac{m-mt}{3}}}$.

30. Sollen Wurzeln durch Wurzeln der nämlichen Urgröße multiplicirt oder dividirt werden, so thut man am beßten, wenn man zuvor die Wurzelzeichen nach n. 20. wegschafft. Z. E. $\sqrt[3]{x^2} \times 3\sqrt{x} = 3\,x^{\frac{2}{3}}x^{\frac{1}{2}} = 3\,x^{\frac{7}{6}} = \sqrt[6]{x^7}$. $a\sqrt[m]{y^n} \times b\sqrt[n]{y^r} = a\,y^{\frac{n}{m}} \times b\,y^{\frac{r}{n}} = a\,b\,y^{\frac{n^2+mr}{mn}} = ab\sqrt[mn]{y^{n^2+mr}}$. $6\sqrt{a^3} \times 2\sqrt[5]{a^4} = 6\,a^{\frac{3}{2}} \times 2\,a^{\frac{4}{5}} = 12a^{\frac{23}{10}} = 12\sqrt[10]{a^{23}}$, $7\sqrt[\frac{1}{3}]{x^2} : 2\sqrt[\frac{3}{5}]{x^{\frac{1}{4}}} = 7\,x^6 : 2\,x^{\frac{5}{12}} = \frac{7}{2}\,x^{\frac{72}{5}} = \frac{7}{2}\sqrt[5]{x^{72}}$.

31. Zur

31. Zur Uebung.

I. $5\sqrt{a^3} \times 4\sqrt[3]{a}$. II. $15\sqrt[\frac{3}{4}]{b^2} : 5\sqrt[m]{b^3}$. III. $\sqrt[n-1]{x^{n+1}} \times \sqrt[n]{x^{n+2}}$. IV. $4\sqrt[\frac{m}{n}]{y^{\frac{2}{3}}} : 3\sqrt[\frac{1}{3}]{y^{\frac{m}{n}}}$.

32. Größen, die als Faktoren vor dem Wurzelzeichen stehen, können, wenn man will, dadurch hinter dasselbe gebracht werden, wenn man sie zur nämlichen Würde erhebt, als der Wurzelexponent fodert, und sie dann als Faktor hinter das Zeichen stellt. Im Allgemeinen läßt sich das so ausdrücken und beweisen:

$a^m \sqrt[n]{x^r} = \sqrt[n]{a^{mn} x^r}$. Denn $a^m \sqrt[n]{x^r} = a^m x^{\frac{r}{n}}$ oder $a^{\frac{mn}{n}} x^{\frac{r}{n}} = \sqrt[n]{a^{mn} x^r}$.

33. Ein gleiches soll in folgenden Ausdrücken geschehen:

I. $3\sqrt{a}$. II. $d^2 \sqrt[3]{c^4}$. III. $x^n \sqrt[\frac{2}{3}]{y^{\frac{1}{8}}}$. IV. $a^2 b^3 \sqrt[n-1]{x^{m+1}}$.

34. Umgekehrt geht dieß ebenfalls an. Es können Faktores, die hinter dem Wurzelzeichen stehen, mit beliebigen Exponenten vor das Wurzelzeichen gebracht werden. — Man mache nur aus dem beliebigen Faktor einen Bruch, wo Nenner und Zähler gleich sind, und erhebe

ihn zu jener Würde, die der Wurzelexponent verlangt, so wird dessen Werth = 1 seyn. Diesen Bruch kann man als Faktor, ohne Veränderung der Größe, hinter das Wurzelzeichen stellen, und die Wurzel des Zählers vor das Wurzelzeichen bringen. — Es soll allgemein in der $\sqrt[n]{x^m}$ der Faktor y^r vor das Wurzelzeichen zu stehen kommen. Der Bruch des Faktors $\frac{y^{nr}}{y^{nr}} = 1$; daher

$$\sqrt[n]{x^m} = \sqrt[n]{\frac{y^{nr}}{y^{nr}}} \times x^m = y^r \sqrt[n]{\frac{x^m}{y^{nr}}}.$$

34. Oft kann nach der Hand der Ausdruck hinter dem Wurzelzeichen, besonders in Zahlen, abgekürzt werden. Z. B. in $\sqrt[3]{100}$ soll 5 vor das Wurzelzeichen gebracht werden. Der Bruch $\frac{5^3}{5^3} = \frac{5\times5\times5}{5\times5\times5} = \frac{125}{125}$; folglich $\sqrt[3]{100} = \sqrt[3]{\frac{125}{125}} \times 100 = 5\sqrt[3]{\frac{100}{125}} = 5\sqrt{\frac{20}{25}}$ $= 5\sqrt{\frac{4}{5}}$. Eben so in $c\sqrt{27}$, wenn etwa 3 vor dem Wurzelzeichen zu stehen kommen soll. $c\sqrt{27} = c\sqrt{\frac{9}{9}} \times 27$ $= 3c\sqrt{\frac{27}{9}} = 3c\sqrt{3}$.

36. Uebungsbeyspiele.

I. In $\sqrt[4]{am}$ soll a hervorgebracht werden. II. In $\sqrt[3]{108}$ die Zahl 4. III. In $b\sqrt[5]{8a^2y^3}$ die Größe 2a. IV. In $\sqrt[n-1]{x^2y^{n-2}}$ die Größe y^n.

37. Er-

37. Erhebt man eine negative Urgröße zu einer Würde von einem ganzen, geraden Exponenten, so ist die Würde positiv. Denn ein ganzer und gerader Exponent zeigt an, daß die Faktoren paarweise da sind: jedes Paar negativer Faktoren giebt ein positives Produkt, und lauter positive Produkte durch einander multiplicirt, geben wieder ein positives Produkt. Z. B.

$$-a \times -a = +a^2$$

$$-a \times -a \times -a \times -a = +a^2 \times +a^2 = +a^4 \text{ u. s. f.}$$

38. Erhebt man eine negative Urgröße zu einer Würde von einem ganzen, ungeraden Exponenten, so ist die Würde allemal negativ. Denn ein ungerader Exponent zeigt an, daß neben einem oder neben mehrern Paaren der negativen Faktoren noch ein einschichtiger solcher Faktor da seyn müsse. Die Paare geben alle zusammen zwar ein positives Produkt, wird aber dasselbe mit dem einschichtigen negativen Faktor multiplicirt, so entsteht am Ende allemal wieder ein negatives Produkt.

39. Es sind demnach a^{-3}, a^{-5}, a^{-7} u. dgl. immerhin als wirkliche Würden anzusehen: unmögliche Würden sind hingegen a^{-2}, a^{-4}, a^{-6} u. s. w.; indem sie nur als bloße Produkte aus den ungleichen Faktoren $-a \times +a$, $-a \times +a \times +a \times +a$ u. d. gl. anzusehen sind.

40. Noch unmöglicher ist eine geradexponentichte Wurzel aus einer Minusgröße, z. B. $\sqrt{-a^2}$ oder $\sqrt[4]{-a^4}$

$\sqrt[4]{-a^4}$ u. dgl. Denn sie kann weder $-a$ noch $+a$ seyn; weil allemal bey der Erhebung zur nämlichen Würde, woraus die Wurzel gezogen worden, die Würde positiv wird. Dergleichen unmögliche Wurzeln heißen in der Mathematik eingebildete oder taube Größen, und haben den Nutzen, daß sie im Erscheinungsfall zu Ende eines Kalkuls versichern, die Foderung sey platterdings unter diesen und jenen Umständen unmöglich.

41. Da $+a^2$ sowohl aus $+a \times +a$ als aus $-a \times -a$ entstehen kann, so folgt, daß jede Quadratwurzel zween Werthe haben könne. Es ist nämlich $\sqrt{+a^2} = \pm a$, $\sqrt{9} = \pm 3$ u. s. Dieser Lehrsatz hat sehr wichtigen Einfluß auf die ganze Mathematik, und erstreckt sich auf alle geraderponentichten Wurzeln.

§. 24.

Von den Decimalen.

1. Wenn man die Brüche so einrichtet, daß der Nenner eine Würde von 10 mit einem ganzen, positiven Exponenten ist, so hat man Decimalen, Decimalbrüche, oder Decimalzahlen; z. B. $\frac{2}{10}$, $\frac{33}{100}$, $\frac{27}{1000}$ u. s. w. Folglich ist der allgemeine Ausdruck für Decimalen $\frac{a}{10^m}$, oder nach §. 23. n. 14. auch $a \times 10^{-m}$.

2. Man

2. Man kann den Nenner ganz weglassen, und, weil er allemal eine Einheit mit Nullen ist, ihn dadurch kennbar machen, daß man den Zähler gerade mit so vielen Ziffern ausdrückt, als viele Nullen der Nenner hat, oder was eines ist, so viele Einheiten in der Formel $\frac{a}{10^m}$ oder $a \times 10^{-m}$ das m anzeigt. Sind Ganze dabey, so werden selbe durch einen Beystrich von den Decimalen getrennt: ist kein Ganzes da, wird der Mangel derselben durch Null angezeigt, und nach selber der Beystrich gemacht. So ist $14\frac{3}{10} = 14,3$, $\frac{74}{100} = 0,74$, $\frac{8}{1000} = 0,008$, $21\frac{5}{100} = 21,05$ u. s. f.

3. Es ist einerley, ob man im Lesen der Decimalen alle Ziffer zusammen ausspricht, und ihnen miteinander den Nenner zueignet, oder ob man sie Ziffer für Ziffer liest, und das erste Zehntel heißt, das zweyte Hundertel, das dritte Tausendel u. s. w. Der Decimalbruch 0,256 heißt entweder $\frac{256}{1000}$ oder $\frac{2}{10} + \frac{5}{100} + \frac{6}{1000}$; denn $\frac{2}{10} + \frac{5}{100} + \frac{6}{1000} = \frac{2 \times 100}{10 \times 100} + \frac{5 \times 10}{100 \times 10} + \frac{6}{1000} = \frac{200}{1000} + \frac{50}{1000} + \frac{6}{1000} = \frac{256}{1000}$. Allgemein ist der Beweis eben so. Es stellen a, b, c etc. die Zähler vor, so ist $\frac{a}{10} + \frac{b}{10^2} + \frac{c}{10^3} = \frac{a \times 10^2}{10^3} + \frac{b \times 10}{10^3} + \frac{c}{10^3} = \frac{a \times 10^2 + b \times 10 + c}{10^3}$.

4. Auch

4. Auch sogar wenn Ganze vor den Decimalen stehen, können selbe sammt dem Zähler zusammengelesen, und ihnen der zugehörige Nenner überhaupt gegeben werden; z. B. $24,52 = \frac{2452}{100}$. Denn es heiße die ganze Zahl $= g$, und die Decimalen $\frac{d}{10^m}$ so ist

$$g + \frac{d}{10^m} = \frac{g \times 10^m + d}{10^m}.$$

5. Aus allem dem erhellet, daß durch die Decimalen die Dekadik in den Zahlen fortgesetzt werde; denn jede Zahl mit angehängten Decimalen läßt sich wie diese ausdrücken: $4602,392 \; 4 \times 10^3 + 6 \times 10^2 + 0 \times 10^1 + 2 \times 10^0 + 3 \times 10^{-1} + 9 \times 10^{-2} + 2 \times 10^{-3} \ldots$

6. Daraus folgt ferner, daß die vier Rechnungsarten in Decimalen die nämlichen seyn müssen, wie bey ganzen Zahlen. Nur zu Ende der Rechnung kömmt es darauf an, wie viel Decimalen man abzuschneiden habe.

7. So wie bey ganzen Zahlen die Nullen zur Linken nichts gelten; weil sie nur den Mangel von Zahlen höherer Würden aus 10 anzeigen: eben so wenig gelten bey den Decimalen die Nullen zur Rechten oder am Ende. Es ist demnach 64,3800 eben so viel als 64,38; denn sie sagen bloß, daß keine kleinern Würden aus 10 mehr vorhanden sind.

8. Will

8. Will man einen gemeinen Bruch in einen Decimalbruch verwandeln, so kann man folgende kleine Formel dafür finden. Es heiße der Zähler (numerator) = n und der Nenner (denominator) = d, so ist

$$\frac{x}{10^m} = \frac{n}{d}$$

$$\text{und} \quad x = \frac{n \times 10^m}{d}.$$

Das heißt: man multiplicire den Zähler mit einer beliebigen Würde aus 10, oder man hänge dem Zähler etliche Nullen an, und dividire durch den Nenner, so müssen so viele Decimalen zum Vorschein kommen als die Größe m Einheiten enhält; oder so viel man Nullen angehängt hat.

9. **Aufgabe.** Es sollen die Brüche $\frac{3}{4}$ und $\frac{2}{25}$ in Decimalen verwandelt werden.

Auflösung.

I.

	2	
$\frac{3}{4}$	3000	0,750 oder 0,75.
	444	

II.

	200	
$\frac{2}{25}$	25	8, also 0,08.
	200	

10. Will

10. Will man die Probe machen, oder was eines ist, aus Decimalen gemeine Brüche herstellen, so darf nur der gehörige Nenner darunter gestellt, und wenn man kann, verkleinert werden. Z. B.

$$0{,}75 = \frac{75}{100} \overset{5}{=} \frac{15}{20} \overset{5}{=} \frac{3}{4}.$$

$$0{,}08 = \frac{8}{100} \overset{4}{=} \frac{2}{25}.$$

11. In den wenigsten Fällen aber, wo gemeine Brüche in Decimalen verwandelt werden, geht die Division auf, wenn man sie auch in's Unendliche fortsetzen würde. Man muß sich demnach nur mit einigen Decimalen begnügen, und den kleinen Ueberrest verachten. Man heißt solche mangelhafte Decimalen Irrationalzahlen. Die Umstände der Rechnung werden allemal bestimmen, ob man viel oder wenig Ziffer in Decimalen vonnöthen habe. Drey Decimalziffer sind am gewöhnlichsten.

12. Aufgabe.

Es sollen $\frac{3}{7}$ und $\frac{1}{9}$ in Decimalen verwandelt werden.

Auflösung.

I.

26(4
$\frac{3}{7}$ 3000 | 0,428.
777

II.

II.

	11(1	
$\frac{1}{9}$	1000	0,111.
	999	

13. **Zur Uebung.**

I. Ein Asper (türkische Silbermünze) gilt in unserm Zahlwerthe $\frac{5}{8}$ kr.: ein kölnischer Albus $1\frac{7}{32}$: ein Rubel von Katharina II. $1\frac{131}{160}$ fl.; was haben diese Brüche für einen Decimalwerth?

II. Ein baierisches Pfund hält im kölnischen Gewichte 1,1884 Pfund. — Ein baierischer Kubikfuß Wasser wiegt 44,696 baierische Pfunde. — Der Druck der Luft auf die Oberfläche des menschlichen Körpers, welche zu 14 Quadratschuh angenommen wird, ist bey der Barometerhöhe 2,25 Fuß, wenn man den Kubikschuh Quecksilber 949,76 Pfund setzt, 1108,05 Pfund groß. Man verwandle diese Decimalen alle in gemeine Brüche.

14. Will man Decimalzahlen addiren, oder subtrahiren, so stelle man wegen der Gleichartigkeit Zehntel unter Zehntel, Hundertel unter Hundertel u. s. w., fange bey den niedrigsten Decimalstellen zur Rechten an, sie zusammen zu zählen, und verfahre übrigens wie bey den ganzen Zahlen; weil in den Decimalen die Dekadik eben so gut wie in den ganzen Zahlen

herrscht.

herrscht. Der Beystrich wird in der Summe und Differenz natürlich auch wieder zwischen den Einheiten und den Zehnteln gemacht.

15. Aufgabe. Es soll addirt werden: 72,58 + 3,0928 + 448 + 0,46292; nebst Probe.

Auflösung.

	72,58
	3,0928
	448
	* 0,46292
Summe	524,13572
Probe	523,6728
	* 0,46292.

16. Wenn bey der Subtraktion der Minuend weniger Decimalen hat als der Subtrahend, oder wenn beym Minuend gar keine Decimalen sind, so kann man sich leere Nullen einbilden, und dann wie bey ganzen Zahlen verfahren. Z. B. 92,5 — 34,849, oder 748 — 7,2087.

Operation.

92,5	748
34,849	7,2087
57,651	740,7913.

17. Zur

17. Zur Uebung.

I.

Bey einer marmornen Bildsäule ist der Piedestal 9,7, die Säule selbst 18,64 und das darauf stehende Bild 6,832 Schuh hoch. Welche Höhe hat die ganze Statue?

II.

Die mittlere Barometerhöhe am Ufer des Meeres ist 340,75 und die auf dem hohen Peissenberg 299,81 Linien; wie groß ist die Differenz?

III.

Zu München ist die mittlere Barometerhöhe 316 Linien; um wie viel höher ist der Barometerstand am Ufer des Meeres?

18. Bey der Multiplikation und auch bey der Division zweyer Decimalzahlen muß der Beystrich weggelassen, und so verfahren werden, als wenn es ganze Zahlen wären. Am Ende der Multiplikation schneidet man so viele Decimalziffer vom Produkte ab, als viel sich in beyden Faktoren vorfinden. Denn es stellen $\frac{a}{10^m}$ und $\frac{b}{10^n}$ die zween Faktores vor, so ist das Produkt $\frac{a \times b}{10^{m+n}}$.

19. Aufgabe.

Es sollen 6,42 mit 45,3 und 0,82 mit 0,004 multiplicirt werden?

Opera-

Operation.

642	82
453	4
1926	0,00328.
3210	
2568	
290,826.	

20. **Zur Uebung.**

I.

Ein rheinischer Schuh hält 1,074 baierische Schuhe. Es ist bekannt, daß ein Körper der schwerern Art in Zeit von 3 Sekunden 140,625 rheinische Schuh hoch herabfällt; wie viel beträgt dieser Raum in baierischen Schuhen?

II.

Wenn 0,017 Pfund Safran 1 fl. kostet, wie viel wird man für 0,08 fl. bekommen?

21. Wenn bey der Division die Anzahl der Decimalen im Divisor und Dividend gleich groß ist, so wird der Quotus, wenn je die Operation aufgeht, allemal eine ganze Zahl seyn; denn $\frac{a}{10^m} : \frac{b}{10^m} = a : b$. Bleibt ein Rest, so kann man, um ihn in Decimalen auszudrücken, einige Nullen anhängen, und die Division fortsetzen. — Ist die Anzahl der Decimalen im Divisor und Dividend gäh-

zähling nicht gleich groß, so ergänzt man das Fehlende durch leere Nullen, und die Regel hat wieder Platz.

22. Aufgabe.

Man mache folgende zwey Divisionen 665,48 : 1,27 und 846,4 : 0,523 wirklich.

```
66548 | 524          846400 | 1618,3
127   |              523    |
 635                 ------
-----                3234
 304                  523
 127                 3138
 254                 ----
-----                 960
  508                 523
  127                ----
  5080               4370
  ----                523
   0                 4184
                     ----
                      1870
                       523.
```

23. Ist der Divisor eine ganze Zahl, dann schneidet man vom Quotus so viele Decimalen ab als der Dividend hat; denn $\frac{a}{10^m} : b = \frac{a : b}{10^m}$. Z. B. 306,96 : 3.

Behandlung.

```
30696 | 102,32.
33333 |
```

24. Zur Uebung.

I.

Ein hiesiges Schäffel (Getreidmaaß) hält 208,5 Geträukmaaß; wie viel solche Geträukmaaße hält 1 Metzen? Es gehen aber bekanntlich 6 Metzen auf 1 Schäffel.

II.

Die Sonne braucht zur Vollendung ihrer Laufbahn 365,26 Tag; der Mond hingegen 27,3215. Wie viele Mondenjahre gehen auf 1 Sonnenjahr?

III.

1000 fl. in baierischen Dukaten wägen 1,17 baierische Pfunde; hingegen 1000 fl. Zwölfer haben 34,724 Pfund. Wie vielmal schwerer ist das Silbergeld gegen dem Goldgelde?

§. 25.

Von den Logarithmen.

1. Erhebt man ein und die nämliche Zahl zu verschiedenen Würden, und drückt die Werthe derselben ebenfalls wieder in Zahlen aus, so heißen die Exponenten die Logarithmen dieser Zahlen, die Größe selbst aber wird die Basis eines solchen Logarithmenmodels oder Logarithmensystems genennt.

Z. B.

z. B. $3^0 = 1$
$3^1 = 3$
$3^2 = 9$
$3^3 = 27$ u. s. f. wo 3 die Basis, 0 der Logarithm von der Zahl 1, 1 der Logarithm von der Zahl 3, 2 der Logarithm von der Zahl 9 ist.

2. Allgemein stellt der Ausdruck $b^m = a$ jedes Logarithmensystem vor, weil m den Logarithm von der Zahl a bedeutet, und in algebraischer Kürze so geschrieben wird $m = la$, wo l kein Faktor ist, sondern nur anzeigt, daß nicht a selbst, sondern der Logarithm von a zu verstehen sey.

3. Es kann demnach jede Zahl die Basis irgend eines Logarithmensistems werden, die Einheit ausgenommen; indem 1 durch alle Würden unverändert bleibt.

4. Unsere gewöhnlichen Logarithmen haben die Zahl 10 zur Basis, und sind vom Engländer Brigg erfunden worden, daher dieses System das briggische genennt wird. In $10^0 = 1$
$10^1 = 10$
$10^2 = 100$
$10^3 = 1000$ 2c. ist 0 wieder der Logarithm von 1, 1 der Logarithm von 10, 2 der Logarithm von 100 u. s. f.

5. Man sieht daraus a) daß die Logarithmen der Zahlen zwischen 1 und 10 größer als Null, und kleiner als 1,

 das

das ist, eigentliche Brüche seyn müssen: b) daß die Logarithmen zwischen 10 und 100 größer als 1 und kleiner als 2; die Logarithmen zwischen 100 und 1000 größer als 2 und kleiner als 3 u. s. f. das heißt, gemischte Brüche sind: c) daß überhaupt der Logarithm für eine Zahl mit Eins und Null leicht zu bestimmen sey; denn so viele Nullen so eine Zahl hat, aus so vielen Einheiten besteht der Logarithm.

6. Man drückt bey den Logarithmen die Brüche in Decimalen aus, und sind bereits durch rastlosen Fleiße verdienstvoller Männer für eine Menge Zahlen berechnet und gesammelt worden. So z. B. fand man, daß $2 = 10^{0,30103\cdots}$, daß $64 = 10^{1,80618\cdots}$; daher der Decimalbruch 0,30103 der Logarithm von 2, und 1,80618 der Logarithm von der Zahl 64 seyn muß.

7. Man nennt eine solche Sammlung Logarithmentabellen oder Logarithmentafeln, welche heut zu Tag für den Mathematiker ein Hauptbedürfniß geworden sind. Vlaks und Wolfs Tabellen kommen für Anfänger am wohlfeilsten, gehen aber nur bis auf die Zahl 10000. Vollständiger und brauchbarer für die ausübende Mathematik sind Vegas und Schulzens Logarithmentafeln.

8. Um die Logarithmen sogleich beym ersten Anblicke von andern Decimalzahlen unterscheiden zu können, trennt

man

man die Decimalen nicht durch Beystriche, sondern durch Punkte von den ganzen Einheiten, oder vom Null als vom Mangel derselben. Die obigen Logarithmen von 2 und 64 werden daher so geschrieben: 0.30103, 1.80618. Die ganze Zahl wird Kennziffer (Characteristica) genennt; weil man daraus ersehen kann, daß die entsprechende Zahl um ein Ziffer mehr habe, als sie Einheiten enthält. Die übrigen Decimalen, welche gewöhnlich aus 7 Ziffern bestehen, heißen die Mantisse.

9. Eigentliche Brüche haben negative Logarithmen; denn es stelle n den Zähler und N den Nenner eines solchen Bruches vor, setze man ferner $n = 10^m$

div. so ist $N = 10^{m+r}$

$$\frac{n}{N} = 10^{-r}$$

das ist $L\left(\frac{n}{N}\right) = -r$.

10. Jeder Tabelllogarithm, negativ betrachtet, entspricht einem Bruch, dessen Zähler 1 und der Nenner jene Zahl ist, welcher er im positiven Zustande gehört. Denn $10^{-1} = \frac{1}{10} = 10^{-2} = \frac{1}{100}$; daher der Logarithm von $\frac{1}{10} = -1$, der Log. von $\frac{1}{100} = -2$ u. s. f. Es ist dieß auch von den dazwischen fallenden Logarithmen wahr, z. B. $\frac{1}{2} = \frac{1}{10^{0'30103\cdots}} = 10^{-0'39103\cdot\cdot}$ folglich $L(\frac{1}{2}) = -0.30103..$ und so von allen andern Logarithmen zu reden.

11. Der Logarithm eines Produkts ist gleich der Summe der Logarithmen von den Faktoren.

Satz.

$$l(ab) = la + lb.$$

Beweis.

$$\begin{array}{ll} & \text{Es sey } 10^m = a \\ & \text{und } 10^n = b \\ \hline \text{mult.} & 10^{m+n} = ab \\ & \text{da nun } m = la \\ & \text{und } n = lb \\ \hline \text{add.} & m+n = la + lb \\ & \text{aber } m+n = l(ab) \\ \hline & l(b)a = lab + lb. \end{array}$$

12. Anwendung auf das Praktische.

Es soll die Zahl 129 mit 37 durch Hilfe der Logarithmen multiplicirt werden.

Auflösung.

$$\begin{array}{r} l129 = 2.1105897 \\ l37 = 1.5682017 \\ \hline 3.6787914 = l4773. \end{array}$$

13. Den Logarithm eines Quotienten erhält man, wenn man den Logarithm des Divisors von dem des Dividends abzieht.

Satz.

$$l\left(\frac{a}{b}\right) = la - lb.$$

Beweis.

$$\begin{array}{lrl} \text{Es sey} & 10^m & = a \\ \text{und} & 10^n & = b \\ \hline \text{div.} & 10^{m-n} & = \frac{a}{b}. \end{array}$$

$$\begin{array}{lrl} \text{Da nun} & m & = la \\ \text{und} & n & = lb \\ \hline \text{subt.} & m-n & = la - lb \\ \text{aber} & m-n & = l\left(\frac{a}{b}\right) \\ \hline & l\left(\frac{a}{b}\right) & = la - lb. \end{array}$$

14. Anwendung. Man dividire die Zahl 8502 durch 78 mittels der Logarithmen.

Auflösung.

$$\begin{array}{ll} l8502 & = 3.9295211 \\ l78 & = 1.8920946 \\ \hline & 2.0374265 = l\,109. \end{array}$$

15. Der

15. Der Logarithm einer Würde ist gleich dem Log. der Urgröße multiplicirt mit dem Exponenten derselben.

Satz.

$$l(a^n) = n\,l\,a$$

Beweis.

$$\text{Es sey } 10^m = a$$

$$\text{zu n erhoben } 10^{mn} = a^n.$$

$$\text{Da nun } m = l\,a$$

$$\times n \qquad mn = n\,l\,a$$

$$\text{aber } mn = l(a^n)$$

$$l(a^n) = n\,l\,a.$$

16. Anwendung. Es soll die Zahl 21 auf logarithmische Art zum Kubus erhoben werden.

Auflösung.

$$l\,21 = 1.3222193$$

$$3$$

$$3.9666579 = l\,9261.$$

17. Der Logarithm einer Wurzel ist gleich dem Logarithm der Urgröße dividirt durch den Wurzelexponenten.

Satz.

$$l(\sqrt[n]{a}).$$

Beweis.

Beweis.

Es sey mehrmal $10^m = a$

$$\sqrt[n]{} \qquad 10^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a}$$

da nun $m = l\,a$

$$: n \qquad \frac{m}{n} = \frac{l\,a}{n}$$

$$\text{aber} \quad \frac{m}{n} = l(\sqrt[n]{a})$$

$$l(\sqrt[n]{a} = \frac{l\,a}{n}.$$

18. Anwendung. Es soll aus 1156 die Quadratwurzel ausgezogen werden.

Auflösung.

$$l\,1156 = \frac{3.0629578}{2\;2222222} \;\Big|\; 1.5314789 = 34.$$

19. Zur Uebung.

Man mache mittels der Logarithmen folgende Rechnungen:

I. 216×29. II. $6035 : 17$. III. $(79)^2$. IV. $\sqrt[3]{5823}$.

20. Aufgabe. Für jeden eigentlichen Bruch, dessen Zähler größer als 1 ist, den zugehörigen Logarithm zu bestimmen.

Auflö-

Auflösung.

Weil jeder Bruch als Quotus zu betrachten ist, so müßte natürlich der Logarithm des Nenners von dem des Zählers abgezogen werden; da aber bey eigentlichen Brüchen der Logarithm des Nenners größer als des Zählers ist, so muß die Operation umgekehrt gemacht werden, und dann wird allemal, wie n. 9. schon gesagt worden, der Logarithm negativ ausfallen. Man bestimme z. B. von $\frac{5}{16}$ den Logarithm:

$$L\ 16 = 1.2041200$$
$$L\ 5 = 0.6989700$$
$$L(\tfrac{5}{16}) = -0.5051500.$$

21. Aufgabe. Für jede gemischte Zahl den Logarithm zu finden.

Auflösung.

Man mache die gemischte Zahl zu einen uneigentlichen Bruch, und ziehe den Logarithm des Nenners von dem des Zählers ab, so wird der Rest der verlangte Logarithm seyn. Z. B. von $20\frac{4}{7} = \frac{144}{7}$:

$$L\ 144 = 2.1583625$$
$$L\ 7 = 0.8450980$$
$$L\ \tfrac{144}{7} = 1.3132645 = l\ 20\tfrac{4}{7}.$$

22. Aufgabe. Den Logarithm für eine Decimalzahl zu bestimmen.

Auflö-

Auflösung.

Man gebe der Decimalzahl ihren zugehörigen Nenner, und behandle sie nach der gegebnen Vorschrift. Z. B. für 0,74 und 84,6

$$0{,}74 = \frac{74}{100} \qquad \begin{aligned} L\ 100 &= 2.0000000 \\ L\ 74 &= 1.8692317 \\ \hline -\ 0.1307683 &= l\ 8{,}74 \end{aligned}$$

$$84{,}6 = \frac{846}{10} \qquad \begin{aligned} L\ 846 &= 2.9273704 \\ L\ 10 &\ \ 1.00\ .\ .\ . \\ \hline 1.9273704 &= l\ 84{,}6. \end{aligned}$$

23. **Zur Uebung.** Man bestimme für folgende Zahlengrößen die Logarithmen: $\frac{91}{107}$, $26\frac{2}{9}$, 0,082, 37,66.

24. Oft fügt es sich, daß am Ende logarithmischer Rechnungen die Mantisse des herausgekommenen Logarithms nicht genau anzutreffen ist. Man schlage sie also, wenn es seyn kann, mit einem größern Kennziffer auf, und schneide dann von der entsprechenden Zahl so viele Decimalen ab, als viele Einheiten zum Kennziffer hinzugekommen. Man soll z. B. bestimmen, welcher Zahl der Logarithm 1.8110386 entspreche. Schlägt man unter dem Kennziffer 1 nach, so ist der nächste Logarithm 1.8061800 = l 64; unter größern Kennziffern hingegen 2.8109043 = l 64,7, und endlich 3.8110385 = l 64,72. Dieß Verfahren ist hier das umgekehrte von n. 22.; denn

will

will man von der Zahl 64,72 den Logarithm erhalten, so muß vom Bruch $\frac{6472}{100}$ zuerst der Zähler aufgeschlagen, und dann wegen dem Divisor oder Nenner 100 das Kennziffer um 2 kleiner gemacht werden. Allgemein kann dieß so dargethan werden. Es sey $10^m = x$; will man den Werth in Zehnteln haben, so multiplicire man beyderseits mit 10, giebt $10^{m+1} = 10x$. Man findet also die Zahl in Zehnteln bey dem Logarithm, der um eins größer ist. In Hunderteln bey dem Logarithm, der um 2 größer ist; denn $10^{m+2} = 100x$. Ueberhaupt also $10^{m+n} = 10^n x$.

25. Zur Uebung. Man finde für folgende Logarithmen ihre entsprechenden Decimalzahlen: I. 0.7558749. II. 1.9489018. III. 0.0358298.

26. Wie findet man aber für negative Logarithmen ihre zugehörigen Bruchzahlen? Man betrachte sie nur im positiven Zustande, und schreibe die dabeystehende Zahl als Nenner unter die Einheit. Denn $10^{-m} = x$ erhoben zur Würde -1 gilt $1^m = x^{-1} = \frac{1}{x}$. Z. B. Welchem Bruche gehört der Logarithm -0.8450080? Weil $+ 0.8450980$ der Zahl 7 entspricht, so entspricht der nämliche negative Logarithm dem Bruche $\frac{1}{7}$. So ein Bruch kann nun allemal, wenn man will, durch Division in Decimalen verwandelt werden.

27. Ist ein derley negativer Logarithm nicht genau anzutreffen, so verfahre man wieder, wie n. 24 gelehrt worden.

Z. B. $-0{,}0791812 = l\,\frac{1}{1{,}2} = l\,\frac{10}{12} = l\,\frac{5}{6}$.

28. Um

28. Um die Logarithmen zur Berechnung größerer Zahlen, als in den Tabellen anzutreffen sind, brauchbar zu machen, dient folgende Beobachtung. Je größer die Zahlen sind, desto genauer verhalten sich die Differenzen derselben, wie die Differenzen ihrer Logarithmen. Dieß kann durch Induktion sehr leicht dargethan werden. Die Zahlen 9280 und 9270 haben 10 zu ihrer Differenz; ihre Logarithmen hingegen 3.9675480 — 3.9670797 = 0,0004683. Nehme man nun zwo andere Zahlen, z. B. 9320 — 9316 = 4; dann auch ihre Logarithmen 3.9694159 — 3.9692295 = 0,0001864, und sehe, ob diese Differenzen nicht beynahe in einer geometrischen Proportion sind.

10 : 4 = 0,0004683 : 0,0001864

4	10
0,0018722	0,0018640
0,0018640	

Es fehlt also nur 0,0000092 an der Gleichheit der Produkte.

Nimmt man zwo stärkere Zahlen, als etwa 9890 — 9888 = 2, und ihre Logarithmen 3.9951963 — 3.9951085 = 0,000878: ferner 9913 — 9910 = 3 und 3.9962051 — 3.9960737 = 0,0001314 so hat man folgende Proportion:

2 : 3 = 0,000878 : 0,0001314

3	2
0,0002634	0,0002628
0,0002628	

0,0000006, wo die Gleichheit der Glieder beynahe völlig zutrifft.

29. So viele Einheiten die Karakteristik hat; so viele Ziffer sind zu Anfang der Mantisse in mehreren aufeinander folgenden Logarithmen immer die nämlichen, sagt eine andere Beobachtung. So z. B. wird das Anfangsziffer 9 des Logarithmen 1.9084850 durch 19 nachfolgende Logarithmen wiederholt. Nach 2.8704039 folgen beynahe eben so viele Logarithmen, deren Mantisse alle mit 87 anfangen; und nach 3.8500033 kommen wieder so viele, die nach dem Kennziffer 850 stehen haben.

30. Aus dieser Beobachtung erhellet, daß auf einen Logarithm mit der Kennziffer 7 eben so viele Logarithmen folgen, deren Mantisse sich in nichts unterscheidet. Es hätten demnach eine Menge Zahlen gleiche Logarithmen, welcher Umstand selbe zur Rechnung unbrauchbar macht. Da nun nach n. 8. Zahlen von 8 Ziffern zur Kennziffer 7 haben, so kann durch Hilfe solcher Tafeln, wo die Mantisse sich nicht weiter als auf sieben Decimalen erstreckt, für derley Zahlen nichts mehr berechnet werden. Man muß also nothwendig zu andern Tafeln die Zuflucht nehmen.

31. Aufgabe. F ü r e i n e Z a h l, d i e i h r e r G r ö ß e w e g e n i n d e n T a f e l n n i c h t k a n n a u f g e s c h l a g e n w e r d e n, d e n e n t s p r e c h e n d e n L o g a r i t h m z u f i n d e n.

Auflösung.

a) Man nehme von der Zahl zur Linken so viele Ziffer, als man aufschlagen kann, und lasse die übrigen als lauter Nullen gelten.

b)

b) Man vermehre das Kennziffer des gefundenen Logarithmen um so viele Einheiten, als Nullen statt den Ziffern genommen werden. Das nämliche beobachte man auch mit dem nächstfolgenden Logarithm, und bestimme die Differenz zwischen ihnen und ihren Zahlen.

c) Da nun auch die Differenz zwischen der Nullzahl und der gegebenen Zahl bekannt ist, so kann durch Proportion auch leicht die Differenz ihrer Logarithmen bestimmt werden.

d) Diese gefundene Logarithmendifferenz addire man zu jenen Logarithm, der allererst aufgeschlagen, und dessen Kennziffer vermehrt worden, so hat man den verlangten Logarithm. — Das Ganze gründet sich auf die vorangeschickte Beobachtung. Folgendes Beyspiel soll alles dieß sonnenklar machen! Was für einen Logarithm hat die Zahl 582448?

Man nehme 562400, so ist die Differenz dieser zwey Zahlen 48; die Differenz aber ihrer Logarithmen = x. Ferner

$$\begin{array}{rcl} L\,562500 & = & 5.7501225 \\ L\,562400 & = & 5.7500453 \\ \hline 100 & & 0,0000772. \end{array}$$

Proportion.

$$\begin{array}{rcl} 100 : 48 & = & 0,0000772 : x \\ & & 48 \\ \hline & & 6176 \\ & & 3088 \\ \hline 100\,x & = & 0,0037056 \\ x & = & 0,0000370. \end{array}$$

Dieß

Dieß nun addirt

$$\begin{array}{r} 5.7500453 \\ 0,0000370 \\ \hline \end{array}$$

$L\ 562448 = 5.7500823.$

32. Wenn nun allgemein eine solche Zahl = N, der aufschlagbare Theil der Zahl zur Linken = n, der andere Theil derselben zur Rechten = r, und die Anzahl der weggelassenen Ziffer zur Rechten = m heißt, dann wird die Proportion natürlich so aussehen müssen:

$$10^m : r = [l(n+1) - ln] : x$$

$$10^m x = r[l(n+1) - ln]$$

$$: 10^m \quad x = \frac{r[l(n+1) - ln]}{10^m}$$

folglich $LN = m + ln + \frac{r[l(n+1) - ln]}{10^m}.$

33. Aufgabe. Man löse nun nach der Formel folgende Aufgabe: Was hat die Zahl 7849243 für einen Logarithm?

Behandlung.

Hier ist 7849 = n
243 = r
3 = m, daher

$$3 + 3.8948143 + \frac{243\,(3.8648697 - 3.8948142)}{1000} =$$

$L\ 7849243.$

abgek. $6.8948143 + \frac{243 \times 0,0000554}{1000}$

$6.8948143 + 0,0000134 = 6.8948277. L\ 7849243.$

33. **Aufgabe.** Für einen Logarithm, dessen Kennziffer größer als in den Tafeln ist, und dessen Mantisse nicht genau anzutreffen, die gehörige Zahl zu finden.

Auflösung. Die Verfahrungsart ist natürlich die umgekehrte von der vorigen. Man nehme dem Kennziffer so viele Einheiten, bis es sich aufschlagen läßt. Findet man die Mantisse genau, so dörfen der Zahl nur so viele Nullen gegeben werden, als viele Einheiten vom Kennziffer abgehen. Im widerigen Falle suche man die Differenz zwischen dem nächst größern und nächst kleinern; so auch zwischen den entsprechenden Zahlen. Da sich nun gleichfalls die Differenz zwischen dem gegebenen und dem nächst kleinern Logarithmen bestimmen läßt, so kann durch Proportion leicht gefunden werden, um wie viel die Zahlen der letztern zween Logarithmen unterschieden sind; welcher Unterschied demnach zur entsprechenden Zahl des nächstkleinern addirt werden muß. — Ein Beyspiel hierüber! Was für eine Zahl gehört dem Logarithm 5.6234927?

Behandlung.

$$\begin{array}{ll} 5.6235594 = l\,420300 & 5.6234927 = l\,420200 + x \\ \underline{5.6234560} = \underline{l\,420200} & \underline{5.6234560} = \underline{l\,420200} \\ \quad 1034 \qquad\qquad 100 & \quad 367 \qquad\qquad\quad x \end{array}$$

Proportion.

$$1034 : 367 = 100 : x$$
$$1034\,x = 36700$$
$$x = 35{,}5 \text{ daher } 420400$$

$$\begin{array}{r} 35{,}5 \\ \hline \text{die Zahl } 420235{,}5. \end{array}$$

34. Allgemein läßt sich dieß alles so darstellen: Es heiße der gegebene Logarithm $= \lambda$, der nächst größere $= L$, der nächst kleinere $= l$, die Zahl, welche diesem letztern Logarithm entspricht $= n$, und die Anzahl der Einheiten, welche vom Kennziffer genommen werden müssen $= m$, so hat man die obige Proportion:

$$(L-l) : (\lambda - l) = 10^m : x$$
$$x(L-l) = 10^m (\lambda - l)$$
$$x = \frac{10^m (\lambda - l)}{L-l}.$$

Daher die eigentliche Zahl $N = n \times 10^m + \frac{10^m(\lambda - l)}{L-l}$

oder $N = \left(n + \frac{\lambda - l}{L-l}\right) 10^m$.

35. **Aufgabe.** Man suche nach dieser Formel die dem Logarithm 6.9289447 entsprechende Zahl.

Behandlung.

$$N = \left(8490 + \frac{3.9289447 - 3.9289077}{3.9289588 - 3.9289077}\right) 10^3$$

$$= \left(\frac{8490 + 0{,}0000380}{0{,}0000511}\right) 1000 \doteq (8490 + 0{,}724) 1000$$

$$= 8490724.$$

36. Ist $\lambda = l$, dann wird aus der Formel $(n \times 10^m)$, das heißt: Man hänge der Zahl so viele Nullen an, als dem Kennziffer Einheiten genommen werden.

37. Sehr

37. Sehr oft ereignet es sich, daß man die Mantissen gegebner Logarithmen mit dem Kennziffer 3 nicht genau in den vlacqischen Tafeln findet, folglich die entsprechende Zahl des nächst kleinern Logarithm noch einen Decimalbruch verlangt. Man kann demnach obige Formel auch für diese Fälle anwenden, nur muß man merken, daß hier m = 0 sey, daher $N = \left(n + \frac{\lambda - l}{L - l}\right) 10^{0}$

$= n + \frac{\lambda - l}{L - l}$.

38. Anwendung. Es soll für den Logarithm 3.7047986 die zugehörige Zahl gefunden werden.

Behandlung.

$$N = 5067 + \frac{3.7047986 - 3.7047509}{3.7048366 - 3.7047509}$$

$$= 5067 + \frac{0,0000477}{0,0000857} = 5067 + 0,55 = 5067,55.$$

39. Zur Uebung.

I.

Man soll für die Zahlen 840926, 9329000 und 2664593 Logarithmen finden:

II.

Ferner für die Logarithmen 4.6229396, 5.8846255 und 6.3000048 die entsprechenden Zahlen bestimmen.

III.

Endlich soll man auch für die Logarithmen 3.9477994 und 3.6872880 die entsprechenden Zahlen mit Decimalen berechnen.

40. Die Logarithmen dienen vorzüglich, solche Gleichungen auszuführen, wo der Exponent unbekannt ist. Z. B. Zu welcher Würde muß die Zahl 8 erhoben werden, daß 2940 herauskömmt?

Behandlung.

$$8^x = 2940$$

logarithmisirt $x\,l\,8 = l\,2940$

$: l\,8 \qquad x = \frac{l\,2940}{l\,8} = \frac{3.6123600}{0.9030900} = 4.$

Also zur 4ten Würde.

Oder: Welche Wurzel muß man aus der Zahl 5832 herausziehen, daß man 18 erhält?

Behandlung.

$$\sqrt[x]{5832} = 18$$

ogar. $\frac{l\,5832}{x} = l\,18$

$\times x \qquad l\,5832 = x\,l\,18$

$: l\,18 \qquad \frac{l\,5832}{l\,18} = x$

$$\frac{3.7658175}{1.2552725} = x$$

$3 = x$ also die Kubikwurzel.

41. Fer-

41. Ferner dienen die Logarithmen zur Ausziehung verschiedener Wurzeln aus Zahlen, wie auch zur Erhebung derselben zu allerley Würden. Es sollen z. E. folgende Ausdrücke berechnet werden.

I. $\sqrt[7]{8902}$, II. $\sqrt[\frac{3}{4}]{524}$, III. $(52)^{\frac{5}{2}}$, IV. $(0{,}8)^{-4}$.

Behandlung.

I.

$$x = \sqrt[7]{8902}$$

$$lx = \frac{l\,8902}{7} = \frac{3.9494876}{7}$$

$$= 0.5642125$$

$$x = 3.666\ldots$$

II.

$$x = \sqrt[\frac{3}{4}]{524}$$

$$lx = \frac{l\,524}{(\frac{3}{4})} = \frac{4l\,524}{3} =$$

$$\frac{4 \times 2.7193313}{3} = \frac{10.8773252}{3} = 3.6257750$$

$$x = 4224{,}5.$$

III.

$$x = (52)^{\frac{5}{2}}$$

$$lx = \tfrac{5}{2}l\,52 = \frac{5\,l\,52}{2} = \frac{5 \times 1.7160033}{2}$$

$$= \frac{8.5800165}{2} = 4.3900082$$

$$x = 19498{,}8.$$

IV.

$x = (0,8)^{-4}$

$lx = -4\,l\,0,8 = -4 \times -3.09699 = 0.3876396$

$x = 2,44 \ldots$

42. Zur Uebung.

I.

Zu was für einer Würde muß $\frac{1}{2}$ erhoben werden, daß 228 daraus wird?

II.

Welche Wurzel muß man aus 0,1024 ziehen, daß man 0,32 erhält.

III.

Man berechne folgende Ausdrücke:

1) $\sqrt[9]{20000}$, 2) $\sqrt[\frac{1}{3}]{5,6}$, 3) $(28\frac{1}{2})^{\frac{3}{4}}$, 4) $(0,009)^{-5}$.

43. Anwendung.

I.

Ein Kapital von 2840 fl. liegt zu 4 Procent auf, so, daß nach jedem Jahre die Interessen zum Kapital geschlagen, und künftig wieder verzinset werden. Zu welcher Summe wächst es nach 20 Jahren an?

Allgemeine Auflösung.

Es heiße der jährliche Zins vom Hundert $= m$, $100 = c$, das Kapital $= k$, so gilt zu Ende des ersten Jahrs die Proportion: $c : c + m$

$$c : c+m = k : x$$

$$x = \frac{(c+m)k}{c}.$$

Zu Ende des zweyten Jahres

$$c ; (c+m) = \frac{(c+m)k}{c} : x$$

$$= \frac{(c+m)^2 k}{c^2}.$$

Zu Ende des dritten Jahres

$$c : (c+m) = \frac{(c+m)^2 k}{c^2} : x$$

$$x = \frac{(c+m)^3 k}{c^3}.$$

Folglich nach n Jahren

$$x = \frac{(c+m)^n k}{c^n} = \left(\frac{c+m}{c}\right)^n k$$

log. $lx = n \frac{l(c+m)}{c} + lk$ oder $n(l(c+m) - lc) + lk$

daher $l\,104 = 2.0170333$

$l\,100 = 2$

0.017333

20

0.3406660

$l\,2840$ 3.4533183

$lx =$ 3.7939843 $= l\,6222{,}8$ fl.

H.

II.

Wenn ein Kapital zu 5 Procent mit gleicher Bedingniß ausgeliehen wird, nämlich daß man jedes Jahr die Interessen zum Kapital schlagen läßt, wie lang wird es hergehen, bis das Kapital noch so groß wird als es anfänglich war?

Auflösung.

Man lege die nämliche Formel $\left(\frac{c+m}{c}\right)^n k = x$ zum Grunde, setze aber $x = 2k$ und $n = x$, so ist

$$\left(\frac{c+m}{c}\right)^x k = 2k$$

$: k \quad \left(\frac{c+m}{c}\right)^x = 2$

Log. $\quad x\,l\left(\frac{c+m}{c}\right) = l\,2$

oder $\quad x\,(l(c+m) - l\,c) = l\,2$

und $\quad x = \frac{l\,2}{l(c+m) - l\,c}$

also
$$l\,105 = 2.0211893$$
$$l\,100 = 2$$
$$\overline{0.0211873}$$

$$l\,2 = 0.3010300 \;|\; 14.2 \text{ Jahre.}$$

```
 211893
 ------
 891370
 211893
 847572
 ------
  437980
  211893
  423786
  ------
  14194.
```

III.

III.

Jemand hat einen Eimer Wein zu 64 Maaß. Er schöpft 1 Maaß Wein heraus, und schüttet 1 Maaß Wasser hinein; schöpft von der Mischung wieder 1 Maaß heraus, und schüttet 1 Maaß Wasser hinein u. s. f. Nun ist die Frage, wie oft er dieses Geschäft wiederholen darf, bis die Mischung aus halb Wasser und halb Wein besteht?

Allgemeine Auflösung.

Es halte das Gefäß n Maaß, so ist nach der ersten Aus- und Einschöpfung n — 1 Maaß Wein und 1 Maaß Wasser darinn. Was bey der zwoten Herausschöpfung an Wein wegkömmt, erfährt man durch folgende Proportion:

$$n : 1 = (n - 1) : x$$

$$x = \frac{n-1}{n}.$$ Dieß vom vorigen Reste abgezogen:

$$\frac{n-1}{1} - \frac{(n-1)}{n} = \frac{n(n-1) - (n-1)}{n}$$

$$= \frac{(n-1)(n-1)}{n} = \frac{(n-1)^2}{n}$$ Maaß vom zurückgebliebenen Weine.

Bey der dritten Herausschöpfung

$$n : 1 = \frac{(n-1)^2}{n} : x$$

$$x = \frac{(n-1)^2}{n^2}$$ Maaß.

Wieder

Wieder abgezogen vom letztern Reste

$$\frac{(n-1)^2}{n} - \frac{(n-1)^2}{n^2} = \frac{n(n-1)^2 - (n-1)^2}{n^2}$$

$$= \frac{(n-1)\,(n-1)^2}{n^2} = \frac{(n-1)^3}{n^2}.$$

Folglich müssen nach x Herausschöpfungen

$\frac{(n-)^x}{n^{x-1}}$ Maaß Wein noch vorhanden seyn; daher die Gleichung:

$$\frac{(n-1)^x}{n^{x-1}} = \frac{n}{2}$$

$$\times n^{x-1} \quad (n-1)^x = \frac{n^x}{2}$$

$$\text{log.} \quad x\,l(n-1) = x\,ln - l2$$

$$\text{verſ.} \quad l2 = x\,ln - x\,l(n-1) = x[ln - l(n-1)]$$

$$\text{div.} \quad \frac{l2}{ln - l(n-1)} = x$$

$$
\begin{array}{lll}
l\,64 & = & 1.8061800 \\
l\,63 & = & 1.7993405 \\
\hline
 & & 0,0068395 \\
l\,2 & = & 0.3010300 \;|\; 44 \text{ mal.} \\
 & & 68395 \\
 & & 273580 \\
\hline
 & & 274500 \\
 & & 68395 \\
 & & 273580 \\
\hline
 & & 929.
\end{array}
$$

Zur

44. Zur Uebung.

I.

Ein Forst hält gegenwärtig laut Taxirung 79400 Klafter. Man hat durch Versuch gefunden, daß der jährliche Zuwachs $\frac{1}{40}$ vom ganzen Inhalt betrage. Wie viel Klafter dürfen nach 18 Jahren gerechnet werden; vorausgesetzt, daß binnen dieser Zeit kein Holz geschlagen wird?

II.

Ein Kapital, daß zu $3\frac{1}{2}$ fl. aufgelegt war, und dessen Zinsen immer zum Kapital geschlagen worden, wuchs in Zeit von 10 Jahren zu 8888 fl. an; wie groß war es anfänglich?

III.

In einem durch Verheerung entvölkerten Lande zählt man nur mehr 800 Menschen. Man darf rechnen, daß 100 derselben jährlich 16 Kinder erzeugen. Wie lang wird es hergehen, bis dieses Land eine Million Einwohner zählt?

§. 26.

Von Erhebung mehrgliederichter Größen zu verschiedenen Würden und von Ausziehung verschiedener Wurzeln.

---

1. Wenn man eine zweytheilige Größe (binomium) z. B. a + b mit sich selbst multiplicirt, so hat man das Quadrat derselben. Multiplicirt man dieses Quadrat

wieder

wieder mit (a + b) so entsteht der Kubus und so immer weiter. Dieß ist der ordentliche Weg, Würden von zusammengesetzten Größen zu erhalten, aber allemal mühsam, und in Fällen, wo der Exponent der Würde eine gebrochene Größe ist, platterdings unmöglich.

2. Um die Regeln zu erforschen, mittels welcher man eine zweygliederichte Größe auf eine bequemere und überall anwendbare Weise zu verschiedenen Würden zu erheben im Stande ist, erhebe man a + b auf den ordentlichen Weg zu etlichen Würden, so wird die Induktion selbe bald ausfindig machen. Hier sind sie!

$$(a+b)^1 = a+b$$
$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$
$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4a^2b^2 + b^4$$
$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5.$$

3. Daraus folgen nun diese Regeln:

I.

Die Exponenten des ersten Theils a fangen im ersten Gliede mit dem Exponenten der Würde an, und nehmen von Glied zu Glied immer um 1 ab.

II.

Die Exponenten des zweyten Theils fangen im ersten Glied mit 0 an, und wachsen von Glied zu Glied um 1.

III.

III.

Die Koefficienten sind Produkte aus den Exponenten des ersten Theils in den vorausgehenden Gliedern, getheilt durch das Produkt eben so vieler Ordnungszahlen von 1 angefangen.

4. Obige 5te Würde von a + b sähe demnach vor der Abkürzung so aus:

$$(a+b)^5 = a^5 b^0 + \frac{5}{1} a^4 b^1 + \frac{5 \times 4}{1 \times 2} a^3 b^2 + \frac{5 \times 4 \times 3}{1 \times 2 \times 3} a^2 b^3$$

$$+ \frac{5 \times 4 \times 3 \times 2}{1 \times 2 \times 3 \times 4} a^1 b^4 + \frac{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5} a^0 b^5.$$

5. Es ist demnach allgemein

$$(a+b)^n = a^n + \frac{n}{1} a^{n-1} b + \frac{n(n-1)}{1 \times 2} a^{-2} b^2$$

$$+ \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \times 2 \times 3} a^{n-3} b^3 \text{ etc.}$$

6. Fernere Bemerkungen wären noch folgende: a) Jede Würde einer zweytheiligen Größe hat um ein Glied mehr als der Exponent Einheiten zählt. — Es kann also das Quadrat einer zweygliederichten Größe nie weniger als 3 Glieder haben, welches in Zukunft wohl zu merken ist. b) Die Koeffizienten in jenen Gliedern, die gleichweit vom ersten und letzten entfernt liegen, sind gleich. Sie wachsen also nur bis auf die Mitte, wo sie wieder abneh-

abnehmen. c) Ist der zweyte Theil der Größe negativ, nämlich — b, so sind jene Glieder in der Würde negativ, wo ein ungerader Exponent auf b trift; die übrigen sind positiv. d) Ist der erste Theil negativ, dann sind jene Glieder in der Würde negativ, wo ein ungerader Exponent auf a trift. e) Da beym $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ der ungerade Exponent 1 allemal auf das 2te Glied 2 a b fällt, es mag a oder b negativ seyn, so folgt daraus, daß die Größen a — b und b — a einerley Quadrat geben. Das nämliche gilt auch von der 4ten, 6ten, 8ten Würde solcher zweytheiligen Größen u. s. f.

7. Ist ein Theil, oder auch beyde Theile ein Produkt oder ein Bruch, so thut man am beßten, wenn man einen solchen Theil einklammert, und als eine einfache Größe behandelt. Am Ende können allemal die Resultate entwickelt werden. Ein Beyspiel sey: $\left(2a+\frac{3d}{m}\right)^3$

$$= (2a)^3 + \tfrac{3}{1}(2a)^2\left(\frac{3d}{m}\right) + \frac{3\times2}{1\times2}(2a)\left(\frac{3d}{m}\right)^2$$

$$+ \left(\frac{3d}{m}\right)^3 = 8a^3 + \frac{36a^2d}{m} + \frac{54ad^2}{m^2} + \frac{27d^3}{m^3}.$$

8. Auf eine ähnliche Art können auch dreytheilige Größen zu Würden erhoben werden, wenn man zwey derselben einklammert und als eine betrachtet. Nach der Hand sind die Würden des eingeklammerten Binomiums

wie-

wieder besonders zu behandeln. — Als Beyspiel diene:
$(a+b-c)^4 = (a+(b-c))^4 = a^4 + 4a^3(b-c) + \frac{4\times3}{2}a^2(b-c)^2 + \frac{4\times3\times2}{2\times3}a(b-c)^3 + (b-c)^4 = a^4 + 4a^3b - 4a^3c + 6a^2(b^2 - 2bc + c^2) + 4a(b^3 - 3b^2c + 3bc^2 - c^3) + (b^4 - 4b^3c + 6b^2c^2 - 4bc^3 + c^4) = a^4 + 4a^3b - 4a^3c + 6a^2b^2 - 12a^2bc + 6a^2c^2 + 4ab^3 - 12ab^2c + 12abc^2 - 4ac^3 + b^4 - 4b^3c + 6b^2c^2 - 4bc^3 + c^4.$

9. Weil man jede Wurzel in eine Würde mit gebrochnen Exponenten verwandeln kann §. 23. n. 22, so ist man im Stande auch jede Wurzel aus zwey- oder mehrtheiligen Grössen zu ziehen. Setzen wir es soll aus $(a+b)$ die Quadratwurzel gezogen werden, so giebt es folgenden Kalkul:

$$\sqrt{a+b} = (a+b)^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}} + \tfrac{1}{2}a^{-\frac{1}{2}}b + \frac{\frac{1}{2}\times-\frac{1}{2}}{2}a^{-\frac{3}{2}}b^2 + \frac{\frac{1}{2}\times-\frac{1}{2}\times-\frac{3}{2}}{2\times3}a^{-\frac{5}{2}}b^3 \ldots\ldots = \sqrt{a} + \frac{b}{2\sqrt{a}} - \frac{b^2}{8\sqrt{a^3}} + \frac{b^3}{16\sqrt{a^5}} \ldots$$

10. Aufgaben zur Uebung.

I. $(x+y)^5$. II. $(a-2b)^4$. III. $(x+(dx))^n$, wo die Würden von (dx) am Ende nicht mehr entwickelt werden dörfen. IV. $(a-m+v)^3$. V. $\sqrt{ax-x^2}$.

11. Da aus $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ richtig ist, daß das Quadrat jeder zweytheiligen Größe aus den Quadraten der einzelnen Theile, und aus dem doppelten Produkte des einen Theils in den andern besteht, so kann man auch leicht eine Regel finden, wie man jede vieltheilige Größe auf die geschwindeste Art zum Quadrat erheben könne; weil dergleichen Rechnungen in der Folge oft vorzukommen pflegen. Denn es ist $(a + b - c + d \text{ etc.})^2 = a^2 + 2a(b - c + d \text{ etc.})^2 + (b - c + d \text{ etc.})^2$ und weil der letzte Ausdruck $(b - c + d \text{ etc.})^2 = b^2 + 2b(-c + d \text{ etc.}) + (-c + d \text{ etc.})^2$ endlich $(-c + d \text{ etc.})^2 = c^2 - 2cd + d^2$, so erhält man, nach gehöriger Substitution und Ordnung, zum Quadrat dieser vieltheiligen Größe den Ausdruck: $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2a(b - c + d) + 2b(-c + d) - 2c(d)$, welches mit Worten ausgedrückt so heißt: Das Quadrat jeder vieltheiligen Größe besteht aus den Quadraten der einzelnen Theile, und aus den doppelten Produkten jedes Theiles in die nachstehenden Theile.

12. Bey Erhebebung etwas längerer Reihen zum Quadrate mag es nicht undienlich seyn, wenn man in der Operation selbst über jedes Glied den doppelten Werth sammt dem Zeichen hinauf schreibt; um die nachstehenden Glieder desto bequemer damit multipliciren zu können. Die Größe $(3m - 6p + x^2 + 4z - 5)^2$ wird demnach so behandelt:

(3m

$$\underbrace{+6m}\ \underbrace{-12p}\ \underbrace{+2x^2}\ \underbrace{+8z}$$

$$(3m - 6p + x^2 + 4z - 5)^2 =$$

$$9m^2 - 36mp + 6mx^2 + 24mz - 30m + 36p^2 - 12px^2 - 48pz + 60p + x^4 + 8x^2z - 10x^2 + 16z^2 - 90z + 25.$$

13. Aus $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ folgt ferner, daß der Kubus jeder zweytheiligen Wurzel aus den Kubussen der einzelnen Glieder, und aus den dreyfachen Quadrat jedes dieser Theile in den andern multiplicirt bestehe. Es läßt sich demnach auch hier eine ähnliche Regel abziehen, wie man mehrgliederichte Größen auf die geschwindeste Art zum Kubus erheben könne. Weil man aber derselben nicht sonderlich benöthigt ist, so darf ich den Leser um so eher auf mein größers Werk verweisen.

14. Weil man nach obiger Anleitung des binomischen Lehrsatzes die Quadratwurzel allemal in einer unendlichen Reihe erhält, es mag die Größe, woraus sie gezogen wird, ein vollkommenes Quadrat seyn oder nicht; so kann für die Ausziehung der Wurzel aus vollkommenen Quadraten noch zuletzt diese bequeme Regel abgeleitet werden:

Man ziehe die Wurzel aus den einzelnen Quadraten, welche leicht zu erkennen sind, stelle sie ohne Zeichen neben einander, und bestimme die doppelten Produkte jedes derselben in seine nachstehenden, so muß sich am Ende

alles

alles aufheben, und man kann auch aus den negativen Produkten des gegebenen Quadrats abnehmen, daß einer von den beyden Faktoren (es gilt gleichviel, welcher) negativ seyn müsse. Folglich können auch die Zeichen auf eine sehr leichte Art berichtigt werden. Man ziehe nach dieser Methode aus der Reihe: $a^2x^2 + 2axy^3 - 4axz - 12ax + 2akxz^2 + y^6 - 4y^3z - 12y^3 + 2ky^3z^2 + 4z^2 + 24z - 4kz^3 + 36 - 12kz^2 + k^2z^4$ die Quadratwurzel.

Die Wurzeln der einzelnen Quadrate sind hier unfehlbar ax, y^3, $2z$, 6, kz^2.

Die doppelten Produkte jedes einzelnen Theils in die nachstehenden sind folgende, und zwar vom $ax = 2axy^3 + 4axz + 12ax + 2akxz^3$, woraus man sieht, daß die Wurzeln $2z$ und 6 negativ seyn müssen; weil man voraus setzen darf, daß die erste Wurzel ax positiv seyn werde. — Die doppelten Produkte von y^3 sind: $4y^3z + 12y^3 + 2ky^3z^2$. Die von $2z$ sind $24z + 4kz^3$ und das von 6 endlich $12kz^2$. Es ist daher, weil sich alles aufhebt, die Wurzel dieses Quadrats $= ax + kz^2 + y^3 - 2z - 6$.

15. Zur Uebung. Man erhebe $5b - c^3 + 9mf + 6k + 2x$ zum Quadrat, und ziehe aus $4d^4 - 32m^3x - 4d^2y^5 + 36d^2z + 64m^6x^2 + 16m^2xy^5 - 144m^3xz + y^{10} - 17y^5z + 81z^2$ die Quadratwurzel aus.

§. 27.

Von Ausziehung der Quadratwurzel aus Zahlen.

1. Von 1 bis 100 hat man zehn vollkommene Quadratzahlen, deren Wurzeln schon aus dem Einmaleins bekannt sind, und also keiner weitern Behandlung bedürfen. Sie geben diese kleine Tabelle:

Quad.	1,	4,	9,	16,	25,	36,	49,	64,	81,	100.
Wurz.	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,	10.

2. Wenn diese Quadrate eine gerade Anzahl von Nullen anhängen haben, so muß der Wurzel die halbe Anzahl der Nullen gegeben werden, z. B. $\sqrt{490000} = 700$. Denn ein solches Quadrat läßt sich allgemein durch den Ausdruck $a^2 \times 10^{2m}$ vorstellen; aber $\sqrt{a^2 \times 10^{2m}} = a \times 10^m$.

3. Die übrigen Quadratzahlen verlangen Regeln, nach welchen man die Wurzel in jedem Falle ausziehen könne. Sie sind aber alle in der Formel $a^2 + 2ab + b^2$ enthalten; weil sich jede Wurzel als zweytheilig betrachten läßt.

4. Die praktischen Regeln heißen kurz so: a) Man theile die Ziffer von der Rechten zur Linken durch Beystriche paarweise ein, so lang es thun-

lich ist. b) Man ziehe von der äußersten Klasse zur Linken, welche auch aus Einem Ziffer bestehen kann, ein Quadrat aus dem Einmaleins ab, so groß es sich abziehen läßt, und schreibe die Wurzel, wie bey einer Division, als Quotus an. c) Zum Rest setze man das nächste Zifferpaar herab, und schreibe als Divisor die doppelte Wurzel darunter, doch so, daß zur Rechten noch für ein Ziffer Platz gelassen wird. d) Der Quotus wird sowohl neben der vorigen Wurzel, als in den leeren Platz neben dem Divisor hingeschrieben, der so vermehrte Divisor damit multiplicirt und abgezogen. e) Sind noch Zifferpaare vorhandeu, so wird das nächste herabgeschrieben, die vermehrte Wurzel wieder duplirt, als Divisor darunter gestellt, und die vorigen Regeln von c) an wiederholt. Es soll als Beyspiel aus der Quadratzahl 708964 nach dieser Anweisung die Wurzel gezogen werden!

```
70,89,64 | 842
64       |
----
 689
 16(4
 656
 ----
  3364
 168(2
 ------
  3364
 ------
    0.
```

Bey

Beweis dieses Verfahrens.

Es ist bekanntlich $(a+b+c \text{ etc.})^2 = a^2+2ab+2ac+b^2+2bc+c^2$ etc., oder wenn man diese Glieder anders ordnet und abkürzt $a^2+2ab+b^2+2(a+b)c+c^2$ etc. Wenn demnach eine Wurzel in Zahlen m Ziffer stark ist, so wird sie auch aus m Theilen bestehen. Der erste und größte Theil muß daher $a.10^{m-1}$ seyn, der zweyte und nächste daran $b.10^{m-2}$ u. s. f. Man substituire nun statt den einfachen a, b, c diese Werthe, so kömmt zum Vorschein $a^2.10^{2m-2}+2a.10^{m-1} \times b.10^{m-2}+b^2.10^{2m-4}+(a.10^{m-1}+b.10^{m-2})c.10^{m-3}+c^2.10^{2m-6}$ etc. eine Formel für alle Zahlen, in welcher das Gesetz klar vor Augen liegt. Es sey nun für unsern Fall $m = 3$, so entsteht dieser Ausdruck: $a^2.10^4+2a.10^2 \times b.10+b^2.10^2+2(a.10^2+b.10)c.10^0+c^2.10^0$. Man muß also von der obigen Zahl allererst ein Tabellquadrat mit 4 Nullen abziehen, dann mit der doppelten Wurzel dividiren, um den zweyten Theil b.10 zu überkommen u. s. f. Hier ist die Entwicklung:

	708964	800	$= a.10^2$
$a^2.10^4 =$	640000	+40	$= b.10$
	68964	40	$= a.10^2+b.10$
$:2a.10^2 =$	1600	+2	$= b.10^0$
$2a.10^2 \times b.10 =$	64000	842	die dreytheilige Wurzel.

$$+b^2 \cdot 10^2 = + \quad 1600$$

$$- \quad 65600$$

$$3364$$

$$2(a \cdot 10^2 + b \cdot 10) = \quad 1680$$

$$2(a \cdot 10^2 + b \cdot 10) b \cdot 10^0 = \quad 3360$$

$$+b^2 \cdot 10^0 = \quad 44$$

$$3364$$

$$0.$$

Läßt man hier die Nullen alle weg, und zeigt beym ersten Theil das paarweise Fortrücken durch Beystriche an, so steht die obige Operation da.

5. Man sieht hieraus, daß die einfache Formel $a^2 + 2ab + b^2$ als Leitfaden hinreichend sey, die Quadratwurzel aus jeder Zahl auszuziehen, wenn man nur allemal nach dem 2ten herausgebrachten Ziffer der Wurzel, im Fall noch Zifferpaare vorhanden sind, alle beyde Ziffer als den ersten Theil der Wurzel gelten läßt, und einen neuen zweyten Theil auf die nämliche Art sucht. Ist noch ein Zifferpaar da, so setze man wieder die bisher vorhandene Wurzel $= a$ (man kann es zum Unterschied A nennen) und suche ein neues b u. s. f. Z. B.

$16,77,72,16 \mid 4096.$

$a^2 = 16$

77

$2a = 8,0$

$2ab + b^2 = 00$

7772

$2A = 80(9$

$2Ab + b^2 = 7281$

49116

$2A = 818(6$

$2Ab + b^2 = 49116$

$0.$

6. Bey Erhebung eines Bruches zum Quadrat muß sowohl Zähler als Nenner quadrirt werden: daher ist nothwendig, daß bey Ausziehung der Quadratwurzel aus einem Bruche diese Wurzel auch aus Zähler und Nenner gezogen werde. Es ist demnach $\sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5}$, $\sqrt{\frac{121}{400}} = \frac{11}{20}$ u. s. w.

7. Weil $(a \cdot 10 + b \cdot 10^0 + c \cdot 10^{-1} \text{ etc.})^2 = a^2 \cdot 10^2 + 2a \cdot 10 \times b \cdot 10^0 + b^2 \cdot 10^0 + 2\,(a \cdot 10 + b \cdot 10^0)\, c \cdot 10^{-1} + c^2 \cdot 10^{-2}$ etc. so erhellet daraus, daß bey Decimalen die paarweise Eintheilung von der Rechten zur Linken geschehen müsse; wie konnte sonst $c^2 \cdot 10^{-2}$ welches Hundertel vorstellt, anders abgezogen werden, als von den ersten Paar Decimalen? So auch von $d^4 \cdot 10^{-4}$, $e^6 \cdot 10^{-6}$ u. s. w. zu reden. Die übrige Behandlungsart ist

ist die nämliche. — Als Beyspiele dienen $\sqrt{1131,6496}$ und $\sqrt{0,000576}$.

Behandlung.

I.

```
11,31,64,96 | 33,64.
 9          |
------
 231
  6(3
 189
------
 4264
  66(6
 3996
------
  26896
   672(4
  26896
------
     0.
```

II.

```
0,00,05,76 | 0,024.
       4   |
  ------
     176
      4(4
     176
  ------
      0.
```

8. Bisher war immer die Rede von vollkommenen Quadratzahlen. Allein es giebt in der ausübenden Mathematik ungleich mehrere Fälle, wo auch aus andern Zahlen die Ausziehung der Quadratwurzel gefodert wird. In derley Fällen braucht es nur der Zahl etliche Nullenpaare als leere Decimalen anzuhängen; die Behandlung wird dann die nämliche seyn, mit dem einzigen Unterschiede, daß die Operation nie aufgehen wird, wenn man auch seiner Lebtage fortrechnen wollte. Die Ursache ist diese, weil kein einziges Quadrat der 9 ersten

Zah-

Zahlen, wovon doch immer eins zuletzt abgezogen wird, auf Null ausgeht: folglich niemals Null gegen Null sich aufheben kann. Solche Wurzeln lassen sich demnach nie ganz, sondern bloß durch Annäherung bestimmen: das heißt, man kann der eigentlichen Wurzel so nahe kommen als man will, nur selbe nie völlig erreichen. Alles dieß erstreckt sich auch auf solche Decimalzahlen, die keine vollständigen Quadrate sind. — Es soll z. B. aus 28 und aus 7,5 die Wurzel gezogen werden.

Behandlung.

I.		II.	
28	5,291 . . .	7,50	2,738 . . .
25		4	
300		350	
10(2		4(7	
204		329	
9600		2100	
104(9		54(3	
9441		1629	
15900		47100	
1058(1		546(8	
5319.		43744	
		3356.	

9. Gemeine Brüche, die keine Quadrate sind, werden vor der Ausziehung der Wurzel in Decimalzahlen verwandelt. Z. B. $\sqrt{\frac{5}{7}}$.

x3264(5

13264(5	0,71,42,85	0,845
5000000	64	
	74 2	
	16(4	
	65 6	
	868 5	
	168(5	
	844 5	
	240.	

10. Aufgaben zur Uebung.

I. $\sqrt{16000000}$. II. $\sqrt{572\ 9761}$. III. $\sqrt{3,8416}$.
IV. $\sqrt{0,0009}$. V. $\sqrt{75}$. VI. $\sqrt{0,12}$. VII. $\sqrt{\frac{2}{3}}$.

11. Anwendung auf Probleme.

I.

In einer regulär angelegten Baumschule, die ein Viereck vorstellt, befinden sich in allem 6084 Stämmlinge. Jede Reihe enthält so viele Stücke als es Reihen sind. Wie viel sind es Reihen, und wie viele Bäumchen stehen in einer Reihe?

Auflösung.

Es sind x Reihen, und in jeder Reihe stehen x Bäumchen; daher die reesische Regel:

B. ?	x Reihen
R. 1	x Bäumchen.

Antw. x^2, also die quadratische Gleichung, oder, wie sie sonst genennt wird, die Gleichung vom zweyten Grade:

x^2

$$x^2 = 6084$$

$\sqrt{}$ $x = 78.$ Es sind demnach 78 Reihen, und in einer Reihe stehen 78 Stämmchen.

II.

Wann wurde die Luftpumpe erfunden? fragte ein Schüler der Naturkunde. Sein Lehrer antwortete: Wenn Sie die Hälfte der dortmaligen Jahrzahl mit ihrem 8ten Theil multipliciren, so erscheint 164836; wann war es?

Auflösung.

Wann die Jahrzahl x heißt, so hat man ohne weiters die Gleichung $\frac{x}{2} \times \frac{x}{8} = 164836$

das ist $\frac{x^2}{16} = 164836$

$\times 16$ $x^2 = 2637376$

$\sqrt{}$ $x = 1624$ die damalige Jahrzahl.

III.

Ein Kapital zu $4\frac{1}{2}$ Procent wurde gerade so viele Jahre ausgeliehen, als viele hundert Gulden es stark war. Sämmtliche Interessen beliefen sich am Ende auf $1300\frac{1}{2}$ fl. Wie groß war das Kapital, und wie lang ward es ausgeliehen?

Auflösung.

Wenn die Anzahl der Jahre, in welchen das Kapital aufgelegt war, x genennt wird, so muß das Kapital 100 x seyn. Daher die reesische Regel: J. fl.

J. fl.?	100 x fl.
	x J.
fl. 100	
J. 1	$4\frac{1}{2}$ fl.
2	9

Antw. $\frac{9x^2}{2}$ und die Gleichung

$$\frac{9x^2}{2} = 1300\tfrac{1}{2} = \frac{2601}{2}$$

$\times 2 \qquad 9x^2 = 2601$

$: 9 \qquad x^2 = 289$

$\surd \qquad x = 17$ Jahre und 1700 fl. war das Kapital.

IV.

Am Hochzeittag eines Wittwers war sein Sohn um 5 Jahr älter als die angehende Stiefmutter, und die Tochter um 5 Jahre jünger als dieselbe. Wenn aber Sohn und Tochter ihr Alter miteinander multipliciren, erhalten sie zum Produkt 336. Wie alt ist jedes von diesen dreyen?

Auflösung.

Wenn die Hochzeiterinn x Jahre alt ist, so zählt der Sohn $x + 5$ und die Tochter $x - 5$, folglich

$$(x+5)(x-5) = 336$$
$$x^2 - 25 = 336$$
$$+25 \quad +25$$
$$x^2 = 361$$

$\surd \qquad x = 19$ Jahre, das Alter der

Hoch-

Hochzeiterinn. Es war demnach der Sohn 24 und die Tochter 14 Jahre alt.

12. Zur Uebung.

I.

Der letzte Wille eines Landedelmanns bestand darin, daß man nach seinem Tode die Armen der ganzen Revier zusammen berufen und jedem so viele Häller reichen solle, als viele sich einfinden würden. Es geschah, und die Spende kostete 418 fl. 8 kr. Wie viel Arme waren es; und wieviel bekam jedes?

II.

Wenn ich die Anzahl meiner Bücher durch ihren 9ten Theil multiplicire, so erhalte ich gerade so viel, als Ihre Bibliothek in sich faßt, sagte ein Schüler zu seinem Lehrer. Es hatte aber der Lehrer 14400, wie viel hatte der Schüler?

III.

Ich denke mir zwo Zahlen: wenn ich sie miteinander multiplicire, geben sie 441; dividire ich sie durcheinander, erscheint 9 zum Quotus. Was sind dieß für Zahlen?

§. 28.

Von unreinen quadratischen Gleichungen.

1. Wenn in einer Gleichung einerseits neben dem Quadrat der unbekannten Größe diese Größe noch einmal aber ohne Würde erscheint, z. B. $x^2 - mx = q$, so heißt die Gleichung unrein, und es kann dieserseits die Wurzel nach §. 26. n. 6. nicht eher ausgezogen werden, bis man das dritte hieher gehörige Glied, ohne die Gleichheit zu verletzen, hergestellt hat; man heißt dieß das unreine Quadrat ergänzen.

Dieses mangelnde Glied ist leicht zu finden, und der Gleichheit unbeschadet herzustellen. Denn wenn man nach der Formel $a^2 \pm 2ab + b^2$ die Wurzel auszuziehen anfängt, so sieht man ohne weiters, daß der erste Theil $= x$ sey. Nun muß man, um b zu bekommen, durch den doppelten ersten Theil, das ist = durch $2x$, in das zweyte Glied, welches sich allgemein durch mx vorstellen läßt, dividiren: also $\frac{mx}{2x} = \frac{m}{2}$. Folglich ist der 2te Theil der Wurzel $\frac{m}{2}$. Weil nun von diesem das Quadrat auch da seyn muß, so wird $\frac{m}{2}$ quadrirt und beyder-

seits

seits addirt. Daher, wenn die Gleichung vorher $x^2 + mx = q$ geheißen, so heißt sie itzt:

$$x^2 + mx + \frac{m^2}{4} = q + \frac{m^2}{4}$$

$\surd$ $$x + \frac{m}{2} = \sqrt{q + \frac{m^2}{4}}$$

vers. $$x = \sqrt{q + \frac{m^2}{4}} - \frac{m}{2}.$$

2. Die abgezogene Regel ist demnach diese: Man addire beyderseits das Quadrat des halben Mitfaktors von x im zweyten Gliede. Die Wurzel ist dann allemal auf der ergänzten Seite das x und der halbe Mitfaktor mit seinem Zeichen.

3. Manchmal scheint gar kein Mitfaktor da zu seyn; manchmal giebt es mehrere Glieder, wo x enthalten ist. — Im ersten Falle, z. B. in $x^2 - x = d$ ist dem ungeachtet die Einheit als Mitfaktor zu verstehen: der zweyte hingegen, z. B. $x^2 + 5x - ax + 3cx = f$ nimmt durch Zerlegung in Faktores diese Form an: $x^2 + (5 - a + 3c)x = f$ und giebt nach der Ergänzung $x^2 + (5 - a + 3c)x + \left(\frac{5 - a + 3c}{2}\right)^2 = f + \left(\frac{5 - a + 3c}{2}\right)^2$ Daher die Wurzel $x + \frac{5 - a + 3c}{2} = \sqrt{f + \left(\frac{5 - a + 3c}{2}\right)^2}$ und endlich $x = \sqrt{f + \left(\frac{5 - a + 3c}{2}\right)^2} - \frac{5 - a + 3c}{2}$.

4. An-

4. Anwendung auf praktische Fälle.

I.

Zween Brüder, die sich auf Mathematik verlegen, möchten von ihrem Vater gerne erfahren, wie alt sie eigentlich wären. Sie erhielten aber von selbem diese Antwort: Einer zählt um 2 Jahre mehr als der andere, und wenn ihr euer Alter miteinander multiplicirt, so erhaltet ihr 323 zum Produkt. Wie müssen sie sich diese Antwort enträthseln?

Auflösung.

Es zähle der jüngere x Jahre, so ist der andere x + 2 Jahre alt, daher

$$x\,(x+2) = 323$$

D. i. $$x^2 + 2x = 323$$

Ergänzt. $$+1 \quad +1$$

$$x^2 + 2x + 1 = 324$$

√ $$x + 1 = 18$$

$$-1 \quad -1$$

$x = 17$; also war der jüngere 17, und der ältere 19 Jahre alt. Die Probe ist durch die Multiplikation bald gemacht.

II.

Plato wurde gefragt, wie viel er Schüler habe. Die Antwort war: Wenn ich vom Quadrat des dritten Theils meiner Schüler 754 abziehe, bleibt ihre Anzahl wieder übrig. Wie viel hatte er Schüler?

Auflösung.

$$\left(\frac{x}{3}\right)^2 - 754 = x$$

d. i. $$\frac{x^2}{9} - 754 = x$$

×9 $$x^2 - 6786 = 9x$$

Vers. $$x^2 - 9x = 6786$$

Ergänzt $$\left(\frac{9}{2}\right)^2 = \frac{81}{4}$$

$$x^2 - 9x + \left(\frac{9}{2}\right)^2 = 6786 + \frac{81}{4} = \frac{27225}{4}$$

$$x - \frac{9}{2} = \frac{165}{2}$$

$$+\frac{9}{2} \quad +\frac{9}{2}$$

$$x = \frac{174}{2} = 87.$$ Plato hatte also 87 Schüler.

III.

Einer von zween Bauern, die miteinander 24 Schäffel angebauet hatten, sagte zum andern: Wenn ich von jedem Schäffel meines Saamens so viel ärndten könnte, als du ausgesäet, so würde ich 135 Schäffel bekommen; wie viel hat jeder gesäet?

Auflösung.

Einer säete x Schäffel, der andere y; daher die erste Gleichung $x + y = 24$. Die zweyte findet man durch die Regel Detri: $1 : y = x$. Antw. $xy = 135$.

Man suche überall y!

Erstens $x + y = 24$

Vers. $y = 24 - x$

Zweytens $xy = 135$

: x $$y = \frac{135}{x}.$$

Dritte

Dritte Gleichung.

$$\frac{135}{x} = 24 - x$$

$\times x \qquad 135 = 24x - x^2$

Vers. $\qquad x^2 - 24x = -135$

Ergänzt $\qquad (12)^2 = 144$

$$x^2 - 24x + (12)^2 = 9$$

$$x - 12 = \pm 3$$

$$+12 \quad +12$$

$$x = 15$$

und auch $x = 9$, also hat der erste entweder 15 oder 9 ausgesäet. Säete er 15, so ist $y = 24 - 15 = 9$: säete er 9, so ist $y = 24 - 9 = 15$.

5. **Zur Uebung.**

I.

Ein alter Schullehrer gab an seinen Geburtstag dieses Räthsel auf: Wenn ich die Zahl 4422 durch mein gegenwärtiges Alter dividire, so sagt mir der Quotus, wie alt ich vor einem Jahre gewesen. Rechnet nun, wie alt ich bin!

II.

Hieher gehört auch das IIte Problem S. 2.

III.

Einen Kapitalisten trifft täglich laut Rechnung 42 kr. $2\frac{50}{73}$ pf. von seinen Interessen. Ein anderer hat um 300 fl. weniger, aber um $\frac{1}{2}$ Procent theurer ausgeliehen, und zieht täglich 46 kr. $3\frac{13}{73}$ pf. Wie groß sind die Kapitale und ihre Procente. §. 29.

§. 29.

Von Ausziehung der Kubikwurzel aus Zahlen.

1. So wie es von 1 bis 100 zehen vollkommene Quadrate giebt, so zählt man auch von 1 bis 1000 zehen vollkommene Kubusse. Hier sind sie in eine Tabelle geordnet:

Kubusse.	1.	8.	27.	64.	125.	216.	343.	521.	729.	1000.
Wurzeln.	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.

2. Haben diese Kubusse genau so viel Nullen anhängen, als sich ihre Anzahl durch 3 ohne Rest dividiren läßt, so muß der Wurzel ebenfalls der dritte Theil dieser Nullen angehängt werden, z. B. $\sqrt[3]{216000000} = 600$. Denn ein solcher Kubus kann allgemein durch den Ausdruck $a^3 \times 10^{3m}$ vorgestellt werden: nun aber ist $\sqrt[3]{a^3 \times 10^{3m}} = a \times 10^m$.

3. Aus anderen Kubussen, die größer sind als die obigen in der Tabelle, muß man die Wurzel nach gewissen Regeln ausziehen, welche Regeln etwas schwerer sind als jene, nach welchen die Quadratzahlen behandelt werden. Dem ungeachtet sind sie alle in der Formel $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ sehr sichtbar enthalten; weil sich jede Wur;el wieder als zweytheilig betrachten läßt.

4. Es wird am beßten seyn, wenn ich die praktischen Regel Schritt für Schritt in dem nächst beßten Beyspiele zeige. Es soll etwa aus der Zahl 97336 die Kubikwurzel gezogen werden, so heißt die erste Regel:

I. Man gebe bey Eintheilung der Zahl in Klassen jeder Klasse 3 Ziffer. Die äußerste zur Linken kann auch aus ein oder zwey Ziffern bestehen.

$$a^3 \mid + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \mid = 97 \mid 336.$$

II. Von der äußersten Klasse zur Linken wird ein Kubus aus der Tabell abgezogen, so groß er sich abziehen läßt, und die Wurzel auf die Quotusseite hinausgeschrieben, dann zum Rest die nächste Klasse herabgesetzt.

$$\begin{array}{r|l|l|l|l} a^3 & + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 & a = 97 & 336 & 4 \\ -a^3 & & -64 & & \\ \hline & 3a^2b + 3ab^2 + b^3 & = & 33336. & \end{array}$$

III. Um in der Formel b zu überkommen, muß $3a^2b$ durch $3a^2$ dividirt werden, doch so, daß auch nebenher die Produkte $3ab^2 + b^2$ abgezogen werden können. Weil nun $a = 4$ oder vielmehr $a = 40$, so ist $a^2 = 1600$ und $3a^2 = 4800$, folglich verlangt der Divisor 48 wegen den 2 Nullen um zwey Ziffer einwärts gesetzt, und in dieser Stellung dividirt zu werden:

$$\begin{array}{ll} 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \mid a + b = & 33336 \mid 46. \\ 3a^2 & (48) \end{array}$$

IV. Damit man nun das erste Produkt $3a^2b$ zum Abziehen überkömmt, ist nothwendig, daß der Divisor mit dem Quotus muliplicirt werde.

$$\begin{array}{lcl} 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \mid a+b & = & 33336 \mid 46 \\ \underline{(3a^2)} & & \underline{(48)} \\ 3a^2b & = & 288 \end{array}$$

V. Das Abziehen dieses Produkts wollen wir so lang aufschieben, bis auch die andern zwey Produkte da sind. Man kann hernach bequemer alle drey zusamm addiren, und auf einmal abziehen. Weil im zweyten Produkt $3ab^2$ das a so viel als 40 bedeutet, so ist einleuchtend, daß $3ab^2 = 3 \times 40 \times 36 = 4320$ ist; folglich begehrt die Zahl 432 wegen ihrem weggelassenen Null um ein Ziffer verrückt zu werden. $b^3 = 216$ bedarf keiner Verrückung. Daher

$$\begin{array}{lcl} 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \mid a+b & = & 33336 \mid 46 \\ \underline{(3a^2)} & & \underline{(48)} \\ 3a^2b & = & 288 \\ 3ab^2 & = & 432 \\ b^3 & = & \underline{216} \\ \hline 3a^2b + 3ab^2 + b^3 & = & 33336 \\ \hline 0 & & 0 \end{array}$$

5. Hat die Kubikzahl mehrere Klassen als zwo, so lasse man, nach dem die zweyte Klasse abgefertigt ist,

den ganzen Quotus $a + b = A$ gelten, und suche, wie oben bey der Quadratwurzel, ein neues b, und so immer fort. Will man den Beweis dieses Verfahrens nach aller Strenge führen, so darf man nur in der dekadischen Formel $(a.10^{m-1} + b.10^{m-2} + c.10^{m-3}$ &c.$)^3$ eine ähnliche Betrachtung wie S. 163 anstellen; so wird er sicher Genugthuung finden. Ein Beyspiel von Kubikzahlen mehrerer Klassen!

$$a^3 + 3a^2b + b^3 = 10{,}779{,}215{,}329 \mid 2209.$$

$$a^3 = 8$$

$$2779$$

$$3a^2 = 12$$

$$3a^3b = 24$$

$$3ab^2 = 24$$

$$b^3 = 8$$

$$3a^2b + 3ab^2 + b^3 \quad 2648$$

$$131215$$

$$3A^2 = 1452$$

$$0 \quad 0$$

$$131215329$$

$$3A^2 = 145200$$

$$3A^2b = 1306800$$

$$3Ab^2 = 53460$$

$$b^3 = 729$$

$$3A^2b + 3Ab^2 + b^3 = 131215329.$$

6. Weil bey Erhebung eines Bruches zum Kubus sowohl Zähler als Nenner diese Würde verlangt, so folgt nothwendig daraus, daß auch bey einem Kubusbruche die Wurzel aus Nenner und Zähler gezogen werde. Folglich ist $\sqrt[3]{\frac{8}{343}} = \frac{2}{7}$. Sind Nenner und Zähler größer als die Tabellkubusse, so muß der Wurzelauszug gleichwohl durch die eben gegebenen Regeln bewerkstelliget werden. Das Beyspiel $\sqrt[3]{\frac{6859}{3314410000000}}$ soll uns hievon genug seyn.

Verfahrungsart.

Zähler 6,859 | 19
1
―――
5859
(3)
―――
27
243
729
―――
5859
―――
0.

Nen=

Nenner 531,441,000,000 | 8100

```
512
─────
19441
(192)
192
 24
  1
─────
19441
─────
    0
```

Also ist die Kubikwurzel $\frac{19}{8100}$.

7. Ein ähnlicher Schluß wie §. 27. n. 7. heißt uns die Decimalen vor Ausziehung der Wurzel von der Linken zur Rechten in Klassen eintheilen. Sind die Decimalzahlen wahre Kubusse, so erscheinen die Ziffer ohnehin zu 3 und 3; nur in Fällen also, wo die Rechnungen nicht aufgehen, wie weiter unten gezeigt werden wird, ist diese Vorsichtsregel vorzüglich anzuwenden. Hier sollen $\sqrt[3]{968,719476736}$ und $\sqrt[3]{0.017576}$ Beyspiele seyn.

I.

```
968,719,476,736 | 4,096
64
――――――
4719
(48)
――――――
4719476
(4800)
――――――
43200
 9720
  729
――――――
4417929
 301547736
(501843)
――――――
3011058
   44172
     216
――――――
301547736
――――――
   0.
```

II.

```
0,017 | 576 | 0,26
    8 |
――――――
 9576
 (12)
――――――
  72
 216
 216
――――――
 9576
――――――
  0.
```

8. Daß man auch sehr oft aus Zahlen, die keine vollkommnen Kubysse sind, die Wurzel ausziehen soll, wird Niemand mehr unwahrscheinlich seyn, seither man weiß, daß dergleichen unvollkommne Quadratwurzeln häufiger als andere vorkommen. Indeß werden derley Zahlen wieder wie vollkommne Kubusse behandelt, und durch Anhängung leerer Nullklassen die Wurzel der Wahrheit so nahe gebracht als möglich. Weil auch kein Tabellkubus auf Null ausgeht wie kein Tabellquadrat, so ist die Unmöglichkeit, daß ein solcher Wurzelauszug einmal aufgehen könne, ebenfalls leicht begreiflich. Man soll nun aus 115 und aus 9,2 die Kubikwurzel ziehen.

Behandlung.

I.

115 | 4,86 . . .
64
―――
51000
(48)
―――
384
768
512
―――
46592
4408000
6912.

II.

9,200 | 2,095 . . .
8
―――
1200
(12)
―――
1200000
(1200)
―――
10800
4860
729
―――
1129329
70671000
(131043).

9. Wenn

9. Wenn aus Brüchen, die keine vollkommne Kubusse sind, die Wurzel zu ziehen ist, thut man gleichfalls wieder am beßten, wenn man solche Brüche erst in Decimalen umschaft, und dann die Kubikwurzel auszieht. *) Wir wollen bloß $\sqrt[3]{\frac{5}{21}}$ vor die Hand nehmen.

Behandlung.

50			
(21)	0,238	095	0,619 . . .
42	216		
80	22095		
(21)	(198)		
63			
	108		
170	181		
(21)			
168	10981		
200	11114000		
(21)	(11163)		
189			
110			
(21).			

10. Zur

*) Ich vergaß bey der Quadratwurzel anzumerken, daß in Fällen, wo sich dieselbe aus dem Nenner wirklich genau ausziehen läßt, dieß allemal mit Vortheil geschehen kann. Auch hier gilt die nämliche Anrathung. In meinem größeren Werke habe ich die Sache durch ein Beyspiel, welches auf doppelte Art berechnet worden, anschaulich zu

10. Zur Uebung.

I. $\sqrt[3]{262144}$. II. $\sqrt[3]{1291467969}$. III. $\sqrt[3]{46656000000}$. IV. $\sqrt[3]{0,010648}$. V. $\sqrt[3]{57,43}$. VI. $\sqrt[3]{9740}$. VII. $\sqrt[3]{\frac{512}{185193}}$. VIII. $\sqrt[3]{\frac{16}{27}}$.

11. Anwendung auf Probleme vom dritten Grad.

I.

Es wurden 230 fl. 24 kr. unter etliche Personen vertheilt. Jeder Person traffen so viele Geldstücke, als es Personen waren, und jedes Geld=

---

zu machen gesucht. Ich darf mich also hier bey der Kubikwurzel um so mehr mit der vortheilhaftern Art allein beguügen, und von da den Schluß rückwärts auf die Quadratwurzel dieses Falles machen. Es sey

$\sqrt[3]{\frac{500}{729}} = \sqrt[3]{\frac{500}{9}}$ daher

```
                       71
 500 | 7,93 . . .    7,93 | 0,88 . . .
 342 |                 99 |
-----
 157000
 (147)
------
 1323
 1701
  729
------
 150039
------
  6961000
 (18723).
```

Geldstück ist so viele Heller werth, als viele Geldstücke eine Person bekam. Wie viel warens Personen?

Auflösung.

Es waren z Personen, folglich bekam eine Person z Geldstücke, und ein jedes Geldstück gilt z Häller. Daher die reesische Regel:

Häll. ?	z Personen
1	z Geldstücke
1	z Häller
Antw.	z^3

weil nun 230 fl. 24 kr. = 13824 hl. so hat man ohne weiters die Gleichung:

$$z^3 = 13824$$

$$\sqrt[3]{} \quad z = 24.$$

Es waren demnach 24 Personen, das Geldstück galt 24 hl., welche einen Groschen ausmachen, und eine Person bekam 24 Groschen.

II.

Wenn man die Hälfte, den vierten und zwöften Theil jener Jahrzahl durch einander multiplicirt, welche man schrieb, als Kolumbus Amerika entdeckte, so erscheint das Produkt $3459^6744\frac{2}{3}$. Wie viel zählte man dazumal?

Auf-

Auflösunn.

Wenn die Jahrzahl x genennt wird, so hat man offenbar die Gleichung

$$\frac{x}{2} \times \frac{x}{4} \times \frac{x}{12} = 34596744\tfrac{2}{3}$$

$$\frac{x^3}{96} = \frac{103790234}{3}$$

$$\times 3 \qquad \frac{x^3}{32} = 103790234$$

$$\times 32 \qquad x^3 = 3321287488$$

$$\sqrt[3]{\ } \qquad x = 1492.$$

12. Zur Uebung.

I.

Eine Kompagnie Soldaten wurden zum Sturmlaufen so ermuntert: „Jeder Mann, der Sturm läuft, erhält so viel Kopfstücke als Mann zurück kommen, und diese Summe wird jedem der Reihe so oft auf die Hand gezählt, als viele Kopfstücke ihn bey der ersten Zahlung getroffen haben.“ Sogleich stürzten etliche hundert Mann auf die Festung los; es gelang ihnen auch: aber es kamen ihrer so wenig zurück, daß die ganze Belohnung nicht mehr als 291 fl. 36 kr. betrug; wie viel blieben am Leben?

II.

Wenn man die Hälfte, den 8ten und 16ten Theil jener Jahrzahl, als man die erste Chokolade in Deutschland trank, durcheinander multiplicirt, kömmt 13718000 zum Vorschein; wann war dieß?

13. Die unreinen kubischen Gleichungen lassen sich bey weiten nicht alle ergänzen, wie die quadratischen. Man muß daher zu andern Kunstgriffen seine Zuflucht nehmen, um derley Gleichungen auszuführen.

14. Ich werde hier bloß von jenen Fällen handeln, wo die Ergänzung möglich ist, übrigens aber den Leser um so mehr auf mein größers Werk verweisen, weil solche Gleichungen nicht gar sonderlich oft vorzukommen pflegen.

15. Aus der Formel $a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ läßt sich jede Gleichung beurtheilen, ob sie einer Ergänzung fähig sey oder nicht. Stellt a die unbekannte Größe vor, so müssen wenigst 3 mit x versehene Glieder vorhanden seyn; weil a ebenfalls in dreyen Gliedern vorkömmt. Noch nicht genug! Es ist auch nothwendig, daß x die nämlichen Exponenten und die Glieder die nämlichen Zeichen haben. Endlich richtet sich der Koefficient des dritten Gliedes nach dem des zweyten. Er muß nämlich das dreyfache Quadrat vom dritten Theil des zwey-

zweyten seyn. Es sey z. B. $x^3 - 6x^2 + 12x = 16$. Man sieht ohne mein Erinnern, daß $b = -2$ gelte, weil, wenn man das zweyte Glied durch $3x^2$ dividirt, der Quotus -2 erscheint. Da nun das dreyfache Quadrat von $-2 = +12$ ist, so folgt unläugbar daraus, daß von einem wahren Kubus noch $(-2)^3 = -8$ abgeht. Also

$$\begin{array}{r} x^3 - 6x^2 + 12x = 16 \\ -8 \quad -8 \\ \hline x^3 - 6x^2 + 12x - 8 = 8 \end{array}$$

$$\sqrt[3]{} \quad \begin{array}{r} x - 2 = 2 \\ +2 \quad +2 \\ \hline x = 4. \end{array}$$

16. Anwendung.

I.

Ein junger Gelehrter hatte in Erfahrung gebracht, daß ein gewisses Frauenzimmer in einer benachbarten Stadt sich ihre Nebenstunden mit Auflösung algebraischer Probleme zu versüßen wisse. Er beschloß auf der Stelle, mit ihr Briefe zu wechseln. Seine Neugierde gieng aber so weit, daß er sie schon in seinem ersten Schreiben um ihr Alter fragte. Allein er bekam folgende Antwort: „Wenn Sie mein Alter mit 3 multipliciren, zum Produkt den Kubus desselben addiren, und von der Summe „das dreyfache Quadrat meines Alters abziehen, so erhalten Sie die Zahl 5833." Wie kann der Korrespondent seinen Vorwitz befriedigen?

Auf.

Auflösung.

Das Alter sey x, daher die unfehlbare Gleichung:

$$3x + x^3 - 3x^2 = 3833.$$ Anders geordnet!

$$x^3 - 3x^2 + 3x = 3833$$

kompl. $\quad -1 \quad -1$

$$x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = 3832$$

$\sqrt{}$ $\quad x - 1 = 18$

$\quad +1 \quad +1$

$$x = 19 \text{ Jahre.}$$ *)

II.

Der junge Gelehrte wollte nun auch sie auf die Probe stellen und antwortete so: „Die Auflösung ihres wer„thesten Problems sagte mir, daß Sie bereits 19 Früh„linge zählen. Nun wird es auch mir erlaubt seyn, „Ihnen mein Alter gleichfalls in ein algebraisches Räth„sel

*) Wollte man diesen Artikel mit gehöriger Vollständigkeit abhandeln, so müßte auch so manches von den wahren und falschen Wurzeln, welche in jeder kubischen Gleichung stecken, gesagt werden. Auch könnte man den Anfänger mit der ehemal so beliebten Cardanisregel bekannt machen; allein, um hier nicht ohne Noth weitläuftig zu werden, darf ich selbe mit allem Fug und Rechte auf das schon öfter erwähnte größere Werk verweisen.

„sel einzukleiden. Wenn Sie die Zahl 13256 durch „mein Alter theilen, so kömmt um $\frac{1}{3}$ mehr heraus, als „wenn Sie mein Alter vom Quadrat desselben abziehen." Wie mag diese Berechnung ausfallen?

Auflösung.

Nennt man das Alter mehrmal x, so ergiebt sich sehr sehr natürlich diese Gleichung:

$$x^2 - x = \frac{13256}{x} - \frac{1}{3}$$

$\times x$ $\quad x^3 - x^2 = 13256 - \frac{x}{3}$

verſ. $\quad x^3 - x^2 + \frac{x}{3} = 13256$

Ergänzt $\quad - \frac{1}{27} \quad - \frac{1}{27}$

$$x^3 - x^2 + \frac{x}{3} - \frac{1}{27} = 13255\,\frac{26}{27}$$

oder $\quad x^3 - x^2 + \frac{x}{3} - \frac{1}{27} = \frac{357911}{27}$

$\sqrt[3]{}$ $\quad x - \frac{1}{3} = \frac{71}{3}$

$\quad + \frac{1}{3} \quad + \frac{1}{3}$

$$x = \frac{72}{3}$$

$$x = 24 \text{ Jahre.}$$

17. Zur Uebung.

Wie heißt die Zahl, dessen dreyfache **Pronik** (Summe aus einer Zahl und ihrem Quadrat) sammt dem Kubus 12933 abwirft?

§. 30.

Fortsetzung der Lehre von geometrischen Proportionen.

1. In jeder geometrischen Proportion verhält sich die Summe des ersten und zweyten Gliedes zur Summe des dritten und vierten Gliedes, wie das erste zum zweyten, oder das zweyte zum vierten Gliede.

Denn wenn $a : aq = b : bq$

so ist auch $(a + aq) : (b + bq) = \begin{cases} a : b \\ aq : bq \end{cases}$

weil $(a + aq) b = (b + bq) a$ nämlich $ab + abq = ab + abq$
oder $(a + aq) bq = (b + bq) aq = abq + abq^2 = abq + abq^2$;
das heißt: das Produkt der äußern Glieder ist in jedem Falle gleich dem Prdukte der mittlern.

2. Die Differenzen solcher Glieder verhalten sich ebenfalls so wie die Summen. Der Beweis ist der nämliche daß $(a - aq) : (b - bq) = a : b$
oder $= aq : bq$,
folglich $(a - aq) : (b - bq) = (a + aq) : (b + bq)$.

3. In einer Proportion können das erste und zweyte, oder das dritte und vierte, oder das erste und dritte, oder

das zweyte und vierte, oder endlich gar alle vier Glieder mit ein und der nämlichen Größe multiplicirt oder dividirt werden, ohne daß die Proportion dadurch Schaden leidet. Der Beweis ist für jede Behauptung bald gemacht. Hier ist für die erste:

$$a : aq = b : bq$$

$$\times n \qquad an : anq = b : bq$$

$$abnq = abnq$$

oder

$$: n \qquad \frac{a}{n} : \frac{aq}{n} = b : bq$$

$$\frac{abq}{n} = \frac{abq}{n}.$$

4. Es können auch alle vier Glieder zu gleichen Würden erhoben, oder aus ihnen gleiche Wurzeln gezogen werden. Denn $a^n : a^n q^n = b^n : b^n q^m$

giebt $a^n b^n q^n = a^n b^n q^n$, und

$$\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{q} = \sqrt[n]{b} : \sqrt[n]{b}\sqrt[n]{q}$$

giebt $\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}\sqrt[n]{q} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}\sqrt[n]{q}$.

5. Die Natur der Dinge erheischt oft, daß ihre Größen das einfache Verhältniß verlassen, und eine zusammengesetzte Form annehmen. So z. B. stehen die Interessen im Verhältniß mit den Produkten aus Kapital und Zeit. Die Proportion kömmt so zu stehen:

$i : I = ct : CT$, wo i und I das Interesse, c und C die Kapitale, t und T die Zeiten (tempora) vorstellen.

Der

Der Beweis wird so geführt: Wir nehmen drey Kapitale an; das erste habe die Größe c, die Zeit t und das Interesse i

das zweyte ——— C ——— T ——————— I

das dritte ——— C ——— t ——————— y

Weil das erste und dritte gemeinschaftliche Zeit haben, so verhalten sich ihre Interessen wie die Kapitale. Das zweyte und dritte haben gleiche Größe; daher verhalten sich ihre Interessen wie die Zeiten.

Daher $i : y = c : C$

$y : I = t : T$

$iy : Iy = ct : CT$

$:y \qquad i : I = ct : CT.$

6. Anwendung. Wie lang müssen 7400 fl. zu $3\frac{1}{2}$ Procent ausgelehnt werden, daß sie 580 fl. Interessen tragen?

Auflösung.

Hier ist $i = 3\frac{1}{2} = \frac{7}{2}$

$c = 100$

$t = 1$ Jahr

$I = 580$

$T = x$ und

$C = 7400$, folglich

$\frac{7}{2} : 580 = 100 \times 1 : 7400x$

$\frac{51800x}{2} = 58000$

$\times 2 \qquad 51800x = 116000$

$:51800 \qquad x = 2$ Jahre $2\frac{226}{259}$ Monate.

 7. Zur

7. Zur Uebung. Wie groß muß ein Kapital seyn, welches in 9 Jahren zu $4\frac{1}{4}$ Procent 3640 fl. Interesse trägt?

8. Oft stehen auch Größen im Verhältniß mit Würfeln oder Wurzeln anderer Größen. Die Geometrie sowohl als die Naturlehre beweisen eine Menge solcher Proportionen. Wir wollen nur ein Paar derselben anführen. a) Die Gewichter zweyer gleichartiger Kugeln verhalten sich wie die Kubusse ihrer Durchmesser. Wenn die Gewichter (pondera) durch p und P, so wie die Durchmesser durch d und D bezeichnet werden, so heißt die Proportion: $p : P = d^3 : D^3$. b) Die Schwingungszeiten zweyer Pendeln verhalten sich wie die Quadratwurzeln der Pendellängen. Also $t : T = \sqrt{l} : \sqrt{L}$. Man versteht aber unter dem Pendel einen aufgehangenen Körper, der sich frey in der Luft hin und her schwingen kann, wie z. B. eine Kirchenlampe.

9. Praktische Anwendung beyder Sätze.

a) Eine 3pfündige Eisenkugel hält im Durchmesser 2,747 Zoll; wie groß ist der Durchmesser einer zentnerschweren Kugel von Eisen?

Auflösung.

$$3 : 100 = 2{,}747^3 : x^3$$
$$3x^3 = 20{,}728886723 \times 100$$
$$3x^3 = 2072{,}8886723$$
$$:3 \qquad x^3 = 690{,}962890766 \ldots$$
$$\sqrt[3]{\ } \qquad x = 8{,}84 \text{ Zoll.}$$

b) Man

b) Man beobachtet, daß sich eine Kirchenlampe, die ungefähr 7 Fuß vom Pflaster entfernt war, in 40 Sekunden 9mal schwingt; wie hoch ist die Kirche, wenn ein Pendel, das in einer Sekunde einmal schwingt, 3,06 Pariser Fuß lang seyn muß?

Auflösung.

$$1 : \frac{40}{9} = \sqrt{3{,}06} : \sqrt{x}$$

quad. $$1 : \frac{1600}{81} = 3{,}06 : x$$

$x = \frac{4896}{81} = 60\frac{4}{9}$ Schuh, welche mit den 7 Schuhen bis zum Pflaster $67\frac{4}{9}$ Schuh als Höhe der Kirche beträgt.

10. Zur Uebung.

I.

Eine eiserne Kugel von 32 Loth oder 1 Pfund hält im Durchmesser 2,905 Zoll; wie schwer ist eine solche Kugel, welche 5,82 Zoll im Durchmesser hält?

II.

Ein Pendel ist nur $9\frac{1}{2}$ Zoll lang, wie viele Terzen braucht es zu einer Schwingung?

11. Manchmal stehen Größen in umgekehrtem Verhältniß unter sich, das heißt: wenn das gerade Verhältniß in einer Proportion durch $b : d = \beta : \delta$ ausgedrückt wird, so giebt die Formel für das verkehrte: $b : d = \delta : \beta$. Die Arithmetik soll uns ein Beyspiel dazu geben: Es verhalten sich die Werthe (valores)

res) zweener Brüche von gleichen Zählern umgekehrt wie ihre Nenner. Also v : V = N : n.

Beweis.

$$v : V = \frac{z}{n} : \frac{z}{N} \quad z:$$

$$v : V = \frac{1}{n} : \frac{1}{N}$$

$$\times nN$$

$$v : V = \frac{nN}{n} : \frac{nN}{N}$$

d. i. $v : V = N : n.$

12. Anwendung.

Wenn der Bruch $\frac{7}{22}$ aus einer Goldmünze 3 fl. 30 kr. = 210 kr. macht, was wird wohl $\frac{7}{12}$ davon werth seyn?

Auflösung.

$$210 : x = 12 : 22$$

$$12x = 4620$$

: 12 $x = 385$ kr. oder 6 fl. 25 kr.

13. Zur Uebung.

Die Anzahl der Arbeiter steht bey jeder bestimmten Arbeit mit der Zeit im verkehrten Verhältnisse. Die Formel ist mithin diese: n : N = T : t. Man rechne nun folgendes Beyspiel: 9 Schnitter brauchen zu einem Weizenacker 48 Stund; wie bald werden 12 Schnitter damit fertig werden?

14. Die-

14. Diese verkehrte Proportionen sind der Grund der umgekehrten Regeldetri. Sie wird wie die ordentliche Regeldetri angesetzt; läßt sich aber daraus erkennen, wenn man sieht, daß die Antwort desto kleiner werden muß, je größer der dritte Satz ist, und wechselsweise. Man multiplicirt hier den mittleren Satz durch den ersten, und dividirt durch den letzten. Ein Beyspiel hierüber! Wenn man von einem Tuche, das 2 Ellen breit ist, zu einem Kleid 5 Ellen braucht, wie viel wird man vonnöthen haben, wenn das Tuch $1\frac{1}{2}$ Ellen breit ist?

Ansatz und Berechnung.

Breite.	Länge.	Breite.
2	5	$1\frac{1}{2}$
2	4	2
4	20 (2	3
	20 | $6\frac{2}{3}$ Ellen.	
	3	

Setzt man dieß nach der verkehrten Proportion an, so kömmt die nämliche Antwort:

Die Formel hierzu wäre: $b : B = L : l$, wo b und B die Breiten, so wie l und L die Längen bezeichnen. Folglich substituirt, giebt $2 : \frac{3}{2} = x : 5$

$\times 2 \qquad 10 = \frac{3x}{2}$

$\qquad\quad 20 = 3x$

$3 \qquad 6\frac{2}{3} = x.$

15. Giebt

15. Es giebt auch Proportionen, die aus geraden und verkehrten Verhältnissen zusammengesetzt sind. So steht z. B. das Gewicht des Bäckerbrodes im geraden Verhältniß mit dem Brodpreise, und im verkehrten mit dem Schrannenpreise $p : P = \frac{b}{s} : \frac{B}{S}$.

Beweis.

Ein Brod, das p ℔ wiegt, koste b kr. beym Schrannenpreis s.
ein anderes, das P — — B — — — — S.
u. ein drittes, das π — — B — — — — s.

also $p : \pi = b : B$ bey einerley Schrannenpreis
$\pi : P = S : s$ bey einerley Brodpreis

mult. $p\pi : \pi P = bS : Bs$

$: \pi$ $\quad p : P = bS : Bs$

$$p : P = \frac{bS}{sS} : \frac{Bs}{sS} \qquad : sS$$

verkl. $p : P = \frac{b}{s} : \frac{B}{S}$.

16. Beyspiele darüber.

I.

Wenn das Schäffel Korn 17 fl. gilt, muß ein Laib Brod für 16 kr. $4\frac{1}{2}$ Pfund wägen. Was wog vor etlich 30 Jahren ein Batzenlaib, da das Schäffel Korn noch 7 fl. galt?

Auf-

Auflösung.

$$4\tfrac{1}{2} : x = \tfrac{16}{17} : \tfrac{4}{7}$$

$$\tfrac{9}{2} : x = \tfrac{16}{17} : \tfrac{4}{7}$$

$$\frac{15x}{17} = \frac{36}{14} = \frac{18}{7}$$

$$112x = 306$$

$x = 2$ Pfund $23\tfrac{3}{7}$ Loth.

II.

Wenn man ausländische Fußmaaße in baierische oder in andere verwandeln will, so kömmt zu bemerken, daß sich die Anzahl dieser zu jener umgekehrt wie ihre Längen verhalten. Es verhält sich aber z. B. die Länge des rheinischen Schuhes zu dem baierischen wie 13919 : 12650. Aus Versuchen ist nun bekannt, daß eine 60pfündige Bombe mit der Ladung von 4 Pfund 16 Loth unter dem Richtwinkel von 45 Graden eine Wurfweite von 2540 Schritten erreicht. Wie viel beträgt dieß in baierischen Schuhen? Es soll aber ein Schritt zu 26 rheinische Zoll gerechnet werden; folglich betrüge diese Wurfweite 5503 rheinische Schuhe.

Auflösung.

$$n : N = L : l$$

$$5503 : x = 12650 : 13913$$

$$12650\, x = 76563239$$

$: 12650 \qquad x = 6052$ baierische Schuhe.

17. Zur

17. Zur Uebung.

I.

Wenn der Weitzen 20 fl. 30 kr. gilt, wiegt die Kreutzersemmel 4 Loth 3 Quintel; was galt vor Zeiten der Weitzen, als ein Groschenwecken noch 25 Loth wog?

II.

Eine hundertpfündige Granate hat 14,189 rheinische Zoll zum Kaliber, was beträgt dieß im baierischen Maaße?

18. Endlich können sich bey Proportionen auch mehrere unbekannte Größen einfinden. In diesem Falle muß man gleichwohl, wenn je die Aufgabe bestimmt ist, so viele Gleichungen aufstellen können, als viele Größen unbekannt sind. Z. B. In einem Obstgarten verhält sich die Anzahl der Aepfelbäume zu der der Birnbäume wie 3 : 5. Wie viel sind es von jeder Sorte, wenn beyde zusammen 144 Stämme ausmachen?

Auflösung.

Es waren x Aepfel = und y Binbräume. Daher

I. | II.

$x : y = 3 : 5$ | $x + y = 144$

$5x = 3y$ | verſ. $y = 144 - x$

$: 3 \quad \frac{5x}{3} = y.$

III.

$$\frac{5x}{3} = 144 - x$$

$$\times 3 \qquad 5x = 432 - 3x \text{ verſ.}$$

$$5x + 3x = 432$$

$$8x = 432$$

$$: 2 \qquad x = 54 \text{ Aepfelbäume.}$$

daher $y = 144 - 54 = 90$ Birnbäume.

19. Auf dieſe Art von Proportionen gründet ſich die ſogenannte Geſellſchaftsrechnung. Man verſteht darunter die Methode, eine Größe in ſolche Theile zu theilen, daß unter ſelben ein verlangtes Verhältniß herrſcht. Es müſſe z. B. ein Gewinn ſo unter etliche Perſonen vertheilt werden, daß ſich die Antheile wie ihre Einleggelder verhalten.

20. Um ein allgemeines Geſetz für dergleichen Rechnungen zu finden, nehme man an, es ſoll die Größe g in die Theile x, y und z zerlegt werden, daß ſich dieſe Theile wie a, b und c verhalten.

Es entſtehen alſo die Gleichungen:

I.	II.	III.
$x + y + z = g$	$x : y = a : b$	$x : z = a : c$
$z = g - x - y$	$y = \frac{bx}{a}$	$z = \frac{cx}{a}$.

IV.

$$\frac{cx}{a} = g - x - y$$

$\times a$ $\quad cx = ag - ax - ay$

verſ. $\quad ay = ag - ax - cx$

$: a$ $\quad y = \frac{ag - ax - cx}{a}.$

V.

$$\frac{bx}{a} = \frac{ag - ax - cx}{a}$$

$\times a$ $\quad bx = ag - ax - cx$

verſ. $\quad ax + bx + cx = ag$

zerfällt $\quad (a + b + c) x = ag$

in Prop. geſ. $\quad (a + b + c) : g = a : x.$

Das Geſetz heißt nun ſo:

Es verhält ſich die Summe aller Einlaggelder zum Gewinn, wie das Einlaggeld der erſten Person, zum Gewinn der erſten Perſon.

Subſtituirt man in der Gleichung $y = \frac{bx}{a}$ ſtatt x den Werth $\frac{ag}{a + b + c}$, ſo überkömmt man

$y = \frac{b}{a} \times \frac{ag}{a + b + c} = \frac{bg}{a + b + c}$, folglich wiederum

$$(a + b + c) : g = b : y.$$

20. Anwendung.

Drey Personen spielen in die Lotterie und gewinnen 1800 fl. A legte 5 B 9 und C 16 fl. Wie viel trift jeden?

Auflösung.

I.

$$\begin{array}{l} 5 \\ 9 \\ 16 \\ \hline 30 : 1800 = 5 : x \\ \quad 30x = 9000 \\ :30 \quad x = 300 \text{ fl. bekömmt A.} \end{array}$$

II.

$$30 : 1800 = 9 : x$$
$$30x = 16200$$
$$:30 \quad x = 540 \text{ fl. bekömmt B.}$$

III.

$$30 : 1800 = 16 : x$$
$$30x = 28800$$
$$:30 \quad x = 960 \text{ fl. C.}$$

21. Zur Uebung.

Eine Viehweide von 52 Morgen wird unter 4 Bauern zur Kultivirung vertheilt, wovon einer $1\frac{1}{2}$, der andere $\frac{3}{4}$, der dritte $\frac{1}{2}$ und der vierte $\frac{1}{3}$ Hof stark ist; wie viel trift jeden?

§. 30.

§. 31.

Von den Reihen oder Progreßionen.

1. Wenn mehrere Größen immer um eine gleiche Differenz fortwachsen z. B. 5, 7, 9, 11, 13 . . ., so hat man eine arithmetisch steigende Progreßion oder Reihe: nehmen hingegen selbe immer um eine gleiche Differenz ab, dann heißt die Progreßion eben darum arithmetisch abnehmend, z. B. 30, 24, 18, 12 . . .

2. Heißt man das erste Glied $= a$, und die beständige Differenz $= d$, so läßt sich das Gesetz jeder steigenden solchen Reihe durch die Formel $a, a + d, a + 2d, a + 3d, a + 4d \ldots$ und jeder solchen abnehmenden durch $a, a - d, a - 2d, a - 3d, a - 4d \ldots$ ausdrücken.

3. Bricht man so eine Reihe irgendwo ab, so wird das letzte Glied durch v (vltimus terminus) und die Anzahl der Glieder durch n vorgestellt. Das S bedeutet den summirten Inhalt aller Glieder einer solchen abgebrochnen Reihe.

4. Weil sich a in jedem Gliede befindet, so muß es auch ohne Zweifel im letzten Gliede seyn. Auch d ist in jedem Gliede, und zwar mit so viel Einheiten multiplicirt,

cirt, als Glieder vorausgehen. Es sind aber allemal $n-1$ Glieder vor dem letzten Gliede; weil es selbst nicht mit gezählt wird. Daher ist in steigenden Progreßionen $v=a+(n-1)d$, und in abnehmenden $v=a-(n-1)d$.

5. Denkt man sich eine abnehmende Reihe umgekehrt, so wird sie eben darum in eine steigende Reihe verwandelt, wo $a=v$ und wechselsweise $v=a$ geworden. Man substituire nun in der Formel

$v=a-(n-1)d$, so erhält man

$a=v-(n-1)d$

vers. $a+(n-1)d=v$. Folglich ist diese Formel allgemein, wenn man bey einer abgebrochenen Reihe das kleinere von den zwey Endesgliedern $=a$ und das größere $=v$ nennt.

6. Anwendung.

Wenn zu Anfang des Jänners der Tag 8 Stund 12 Minuten, und zu Ende desselben 9 St. 42 M. lang ist; um wie viel wächst er täglich im Durchschnitte dieses Monats?

Auflösung.

Hier ist $a=8$ St. 12 M. $=492$ M.
$v=9$ St. 42 M. $=582$
$n=31$, also $n-1=30$
und $d=x$. Daher nach der Substitution

$$\begin{aligned} 582 &= 492 + 30x \\ -492 &\quad -492 \\ \hline 90 &= 30x \\ :30 \qquad 3 &= x. \end{aligned}$$

7. Zur Uebung.

I.

Eine Kirchenorgel hat in aufsteigender Reihe 24 Pfeifen. Die kleinste mißt 17 und die größte 132 Zoll; um wie viel ist eine größer als die aandere?

II.

Ein angehender Gaukler machte das erstemal einen 14 Zoll hohen Sprung. Sein Prinzipal befahl ihm, täglich um $\frac{1}{8}$ Zoll höher zu springen, so lang, bis er $4\frac{1}{2}$ Schuh erreichen würde. Wie lang dauerte seine Lehrzeit?

8. Die natürlichen Zahlen gehen ebenfalls in einer arithmetischen Reihe fort, wo $d = 1$, und, wenn auch $a = 1$, allemal $n = v$ ist; denn man substituire in $v = a + (n - 1)d$ so erscheint $v = 1 + n - 1$ abgek. $v = n$. Die Summen solcher Progreßionen heißen Trigonalzahlen.

9. In jeder arithmetischen Reihe ist die Summe der zwey Endesglieder so groß als die Summe zweyer andern, die von selben gleichweit abstehen.

Beweis.

$$\overset{1}{a},\ \overset{2}{a \pm d},\ \overset{3}{a \pm 2d},\ \overset{4}{a \pm 3d},\ \overset{5}{a \pm 4d},\ \overset{6}{a \pm 5d}$$

$$\frac{\begin{matrix} 6.\ a \pm 5d \\ 1.\ a \end{matrix}}{2a} = \frac{\begin{matrix} 5.\ a \pm 4d \\ 2.\ a \pm d \end{matrix}}{2a \pm 5d} = \frac{\begin{matrix} 4.\ a \pm 3d \\ 3.\ a \pm 2d \end{matrix}}{2a \pm 5d.}$$

10. Wenn man die Summe der beyden Endesglieder was immer für einer abgebrochenen Reihe mit der halben Anzahl der Glieder multiplicirt, so überkömmt man allemal den Summinhalt einer solchen Reihe.

Satz.

$$S = \frac{n}{2}(a + v).$$

Beweis.

Es stelle folgende Reihe eine arithmetische Progreßion vor; $a + b + c + d + e + v = S$

also $n = 6$

und $\frac{n}{2} = 3$

Nun ist ferner $a + v = a + v$

$b + e = a + v$ nach n. 9.

$c + d = a + v$

$a + b + c + d + e + v = 3(a + v)$

subst. $S = \frac{n}{2}(a + v).$

11. Anwendung.

I.

Ein Sprachlehrer gab seinem Schüler in der ersten Lektion 4 Wörter auswendig zu lernen auf, und jeden folgenden Tag um eine gleiche Anzahl Wörter mehr. Am 22sten Tag hatte er schon 67 Wörter gelernt. Wie stark ward bis dahin seine Copia verborum?

Auflösung.

Hier ist $\left.\begin{array}{l} a = 4 \\ n = 22 \\ v = 67 \\ S = x \end{array}\right\}$ Jahre $x = \frac{22}{2}(4 + 67)$

$x = 11 \times 71$

$x = 181$ Wörter.

II.

Ein Arrestant beklagte sich beym Richter, daß er schon 3 Jahre 231 Tage sitze, und zeigte ihm seine Rechnung. Es fand sich aber, daß er die Tage mit 1, 2, 3 u. s. f. bemerkt, und sie zuletzt in eine Summe gebracht hatte. Wie lang saß er eigentlich?

Auflösung.

In diesem Beyspiel ist $S = 3$ J. 231 T. $= 1326$ T.

$a = 1$

$d = 1$

daher $n = v = x.$

Substit. $1326 = \frac{x}{2}(1 + x)$

$\times 2$ $\quad 2652 = x + x^2$

oder $\quad x^2 + x = 2652$

kompl. $\quad + \frac{1}{4} \quad + \frac{1}{4}$

$x^2 + x + \frac{1}{4} = 2652 + \frac{1}{4} = \frac{10609}{4}$

$\sqrt{}$ $\quad x + \frac{1}{2} = \frac{103}{2}$

$- \frac{1}{2} \quad - \frac{1}{2}$

$x = \frac{102}{2} = 51$ Tage.

12. Zur Uebung.

I.

Ein Landmann hat einen dreyeckichten Krautgarten. An der Spitze kömmt 1 Pflanze zu stehen, dann mit jeder folgenden Reihe um 1 Pflanze mehr. Wie viel braucht er Pflanzen, wenn es 88 Reihen sind?

II.

Jemand schrieb sein Alter von Jahr zu Jahr auf. Im nämlichen Jahr, als er starb, brachte er diese Zahlen alle in eine Summe und erhielt 351, wie alt wurde er?

13. Es giebt Fälle, wo man beyde Formeln zu Hilfe nehmen, oder selbe in eigens dazu verfertigten Tabellen nachschlagen muß, wo sich für jeden möglichen Fall eine Formel finden läßt. Diese Tafeln enthalten in allen 20 Formeln, welche auf folgende Art berechnet worden sind. Man suchte in der ersten Formel $v = a + (n - 1)d$ durch Versetzung einen Werth für a, einen für n und einen für d; folglich hat man schon 4 Formeln. Auf gleiche Weise suchte man in der zweyten Hauptformel $S = \frac{n}{2}(a + v)$ Werthe für a, n und v. Stellt man diese Werthe in neue Gleichungen zusammen, so entspringen wieder andere Formeln, bis endlich die Sache durch besagte 20 Formeln erschöpft ist.

14. Beyspiele.

I.

Ein Lotteriefreund setzte anfänglich nur 8 kr. Als das Loos nicht sogleich zutreffen wollte, vermehrte er in Zukunft den Einsatz immer um ein gleiches Geldstück. Beym 13ten Einsatz, wo er 2 fl. 32 kr. zahlte, gewann er endlich. Was kostete ihm dieser kleine Risiko, und um was vermehrte er seinen Einsatz?

Auflösung.

Es ist dießmal $a = 8$

$d = x$

$n = 13$

$v = 2$ fl. 32 kr. $= 152$ kr.

$S = y.$

Demnach

I.

$$152 = 8 + x\,(13 - 1)$$
$$152 = 8 + 12x$$
$$-8 \quad -8$$
$$144 = 12x$$
$$12 = x.$$

II.

$$y = \tfrac{13}{2}\,(8 + 152)$$
$$y = \tfrac{13}{2} \times 160 = 13 \times 80$$
$$y = 1040 = 17 \text{ fl. } 20 \text{ kr.}$$

Er setzte also allemal um 12 kr. mehr, und alle seine Einlagen beliefen sich auf 17 fl. 20 kr.

II.

Eine Pflanzenleserinn erhielt in der Apotheke für ein Körbchen voll Blumen $1\frac{3}{5}$ fl., mit dem

dem Versprechen, daß, so oft sie wieder ein solches Körbchen voll bringen würde, man ihr allemal um $\frac{3}{8}$ fl. mehr ausbezahlen wolle. Das fleißige Mädchen fuhr zu sammeln fort, und hatte während der Blüthezeit $78\frac{1}{5}$ fl. gelöset; wie viele Körbchen voll lieferte sie?

Auflösung.

Hier gilt $a = 1\frac{3}{5} = \frac{8}{5}$

$d = \frac{3}{8}$

$S = 78\frac{1}{5} = \frac{391}{5}$

$v = x$

$n = y.$

I.

$$x = \frac{8}{5} + (y-1)\frac{3}{8}$$
$$8x = \frac{64}{5} + 3y - 3$$
$$40x = 64 + 15y - 15$$
$$40x = 49 + 15y$$
$$\frac{40x-49}{15} = y$$

II.

$$\frac{391}{5} = \frac{y}{2}\left(\frac{8}{5}+x\right)$$
$$\frac{782}{5} = y\left(\frac{8}{5}+x\right)$$
$$782 = y(8+5x)$$
$$\frac{782}{8+5x} = y.$$

III.

$$\frac{40x-49}{15} = \frac{782}{8+5x}$$
$$320x - 392 + 200x^2 - 245x = 11730$$

geord. $200x^2 + 75x - 392 = 11730$
$+ 392 + 392$

$$200x^2 + 75x = 12122$$

: 200 $x^2 + \frac{75x}{200} = \frac{12122}{200}$

Kompl. $x^2 + \frac{75x}{200} + \left(\frac{75}{400}\right)^2 = \frac{12122}{200} + \frac{5625}{160000}$

$$= \frac{9703225}{160000}$$

$$x + \frac{75}{400} = \frac{3115}{400}$$
$$-\frac{75}{400} \quad -\frac{75}{400}$$
$$x = \frac{304}{40} = \frac{76}{10}$$ dieß substit. in
$$\frac{40x-49}{15} = y$$
$$\frac{40 \times \frac{76}{10} - 49}{15} = y$$
$$\frac{304-49}{15} = y$$
$$\frac{255}{15} = y$$
$$17 = y$$

also hatte sie in allem 17 Körbchen voll gesammelt.

15. Zur Uebung.

I.

In einem Hause muß jeder Inwohner um etliche Gulden mehr Miethzins zahlen als der andere. Der Geringste giebt jährlich 19 fl., und doch bekömmt der Eigenthümer für den ganzen Hauszins 685 fl. Um wie viel muß jeder mehr zahlen, wenn es 10 Einwohner sind, und was zahlt die theuerste Wohnung?

II.

Zur Aufmaurung eines Kirchenthurms begehrte der Baumeister für die erste Klafter in die Höhe 70 fl., und dann von jeder Klafter um 9 fl. mehr. Der Betrag war am Ende 4450 fl.; wie hoch ist der Thurm geworden?

16. Bis daher handelten wir von den arithmetischen Reihen des ersten Ranges, von solchen Reihen nämlich, wo

wo man beym Abziehen eines jeden Gliedes vom nachfolgenden Gliede schon das erstemal gleiche Differenzen erhält, z. B. 5, 8, 11, 14 . . .

Diff. 3, 3, 3 . . .

17. Es giebt aber Reihen, wo die ersten Differenzen nicht gleich sind, sondern in einer arithmetischen Progression fortgehen, folglich erst die zweyten Differenzen gleich seyn können. Man nennt sie Reihen des zweyten Ranges, wie z. E. die Quadrate der natürlichen Zahlen.

	9, 16, 25, 36, 49 . . .
Erste Diff.	7, 9, 11, 13 . . .
Zweyte Diff.	2, 2, 2, . . .

oder wo die Gleichheit sich gar erst bey den dritten Differenzen zeigt, welches demnach Reihen des dritten Ranges sind. Ein Beyspiel geben die Kubusse der natürlichen Zahlen,

	1, 8, 27, 64, 125 . . .
Erste Diff.	7, 19, 37, 61 . . .
Zweyte Diff.	12, 18, 24 . . .
Dritte Diff.	6, 6 . . .

18. Die Formel für die Reihen des zweyten Ranges ist demnach diese:

$$\overset{1}{a},\ \overset{2}{a+d},\ \overset{3}{a+2d+\delta},\ \overset{4}{a+3d+3\delta},\ \overset{5}{a+4d+6\delta},\ \overset{6}{a+5d+10\delta}\ \ldots$$

19. Man

19. Man sieht daraus 1) daß a bey jedem Gliede ist, folglich auch beym letzten, wo man die Reihe abbricht, 2) daß d in jedem Gliede mit n — 1 multiplicirt erscheine, 3) daß δ zum Koefficienten eine Trigonalzahl von n — 2 Gliedern habe. Es ist aber eine solche Trigonalzahl nach n. 8 u. 10.

$$S = \frac{(1+n-2)(n-2)}{2} = \frac{(n-1)(n-2)}{2}$$

$$= \frac{n^2 - 3n + 2}{2}.$$

20. Das letzte Glied einer solchen Reihe des zweyten Ranges wäre diesen drey Bemerkungen zufolge

$$v = a + (n-1)d + \frac{n^2 - 3n + 2}{2}\delta, \text{ das ist}$$

$$v = a + dn - d + \frac{n^2\delta}{2} - \frac{3n\delta}{2} + \delta \text{ und geordnet}$$

$$v = \frac{\delta}{2}n^2 + \left(d - \frac{3\delta}{2}\right)n^1 + (a + \delta - d)n^0.$$

Anwendung. Ein länglichter Kugelhaufen vor einem Zeughause hat zu oberst eine einfache Reihe von 24 Kugeln, dann folgt eine doppelte von 50, ferner 78, 108 u. s. f. Wie viele Kugeln hält die unterste, wenn es in allen 12 Reihen sind?

Auflösung.

Man untersuche vor allen die Differenzen

24, 50, 78, 108 . . .

26, 28, 30 . . .

2, 2, 2 . . .

Also ist $a = 24$

$d = 26$

$\delta = 2$

$n = 12$, diese Werthe nun in der Formel

$$v = \frac{\delta}{2} n^2 + \frac{2d - 3\delta}{2} n + a + \delta - d \text{ substituirt:}$$

$$\frac{2}{2} \times 144 + \frac{52 - 6}{2} \times 12 + 24 + 2 - 26 = 144 + 23 \times 12$$

$= 144 + 276 = 420$ Kugeln.

Zur Uebung.

Ein anderer Kugelhaufen zählt in der ersten Reihe nur 16, in der zweyten Doppelreihe 34, in der dritten 54, u. s. f. wie viel Kugeln werden sich in der 9ten Reihe befinden?

21. Der Grundriß vom Ausdrucke des letzten Gliedes wäre demnach $v = n^2 + n^1 + n^0$. Nun ist die Frage, mit welchem Theil von n jedes Glied multiplicirt werden müsse, damit man die Summe einer solchen Reihe von n Gliedern erhalte. Ich setze einsweilen, daß das erste Glied mit nx, und das zweyte mit ny und das dritte mit nz multiplicirt werde, also

$$S = n^3 x + n^2 y + n z.$$

Es

Es kömmt jetzt nur darauf an, daß man diese unbekannten Faktores kennen lerne. Weil das ganze Gesetz einer solchen Reihe vom zweyten Rang in den ersten drey Gliedern liegt, so kann man noch 3 Gleichungen ausfindig machen. Es ist ausgemacht, daß wenn $n = 1$ gesetzt wird, die Summe $x + y + z = a$ sey. Ist $n = 2$, dann muß eben darum $8x + 4y + 2z = a + d$ sey. Endlich wenn $n = 3$, so hat man $27x + 9y + 3z = a + 2d + \delta$.

Man ziehe den doppelten Werth der ersten Gleichung von der zweyten, und den dreyfachen Werth derselben von der dritten ab, so entsteht

$$6x + 2y = d$$
$$24x + 6y = 3d + \delta.$$

Man ziehe mehrmal den dreyfachen Werth dieser erstern von der zweyten ab, so erscheint

$$6x = \delta$$
$$: 6 \qquad x = \frac{\delta}{6}.$$

Endlich ziehe man vom vierfachen Werthe der erstern die zweyte ab, und es ergiebt sich

$$2y = d - \delta$$
$$: 2 \qquad y = \frac{d - \delta}{2}.$$

Diese Werthe in der ersten Urgleichung $x + y + z = a$ substituirt

$\frac{\delta}{6}$

$$\frac{z}{6} + \frac{d-\delta}{2} + \delta = a$$

$$\times 6 \qquad \delta + 3d - 3\delta + 6z = 6a$$

$$\text{abgek.} \qquad 3d - 2\delta + 6z = 6a$$

$$z = \frac{6r - 3d + 2\delta}{6}.$$

Wir kennen also die vorhin unbekannten Faktores, und es ist demnach

$$S = \frac{\delta}{6} n^3 + \frac{d-\delta}{2} n^2 + \frac{6a - 3d + 2\delta}{6} n.$$

21. Anwendung.

Ein Gastgeb kauft bey einem Weinwirth Wein von 15erley Sorten, wo immer einer um 12 kr. theurer als vom andern ist. Der erste, wovon er 1 Maaß kaufte, kostet 24 kr. Von jeden andern nahm er um 1 Maaß mehr. Was beträgt dieß in Geld?

Auflösung.

		Erste Diff.	2te Diff.
Er zahlte für den ersten in Zwölfern	2		
für den 2ten	6	4	
für den 3ten	12	6	2
für den 4ten	20	8	2

Es ist demnach $a = 2$
$d = 4$
$\delta = 2$
$n = 15.$

Daher $S = \frac{2}{6} 15^3 + \frac{4-2}{2} 15^2 + \left(\frac{6 \times 2 - 3 \times 4 + 2 \times 2}{6}\right) 15$

$= 1125 + 225 + 10 = 1360$ Zwölfer $= 272$ fl.

22. Zur Uebung.

Die ersten 3 Reihen eines Kugelhaufen halten 34, 70 und 108 Kugeln; wie viel hält der ganze Haufen, wenn es in allen 11 Reihen sind?

23. Eine Reihe Größen, wo jede durch die vorhergehende dividirt einerley Quotus giebt, der größer als 1 ist, heißt eine geometrisch steigende Progreßion oder Reihe. Z. B. 5, 20, 80, 320, 1280 . . . Ist der Quotus kleiner als 1, oder muß man, um mehr als 1 zum Quotus zu bekommen, jede Größe durch die nachstehende dividiren, so heißt die Progreßion geometrisch abnehmend, wie etwa 81, 27, 9, 3, 1 . . .

24. Es ist ist sehr natürlich, daß die Formel a, aq, aq^2, aq^3, aq^4 . . . der Ausdruck für alle mögliche geometrische Reihen seyn müsse. Weil sich ferner a in jedem Gliede befindet, und das dabey stehende q zu so vielen Einheiten erhoben ist, als viele Glieder vorausgehen, so sieht man ebenfalls, daß hier $v = aq^{n-1}$ sey.

25. Anwendung.

I.

Bey einer Versteigerung wurde ein kostbares Buch um einen sehr geringen Preis aufge-

wor-

worfen; aber jeder von den Kennern trieb den andern immer um die Hälfte hinauf. Zum 8tenmal blieb es endlich, und wurde für 36 fl. 27 kr. bezahlt; um welchen Preis hatte man es aufgeworfen?

Auflösung.

Man sieht, daß $a = x$

$q = 1\frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

$n = 8$

und $v = 36$ fl. 27 kr. $= 2187$ kr.

folglich $2187 = x \times (\frac{3}{2})^7$

$2187 = \frac{2187x}{128}$

$: 2187 \qquad 1 = \frac{x}{128}$

$= 128 \qquad 128 = x$, das ist 2 fl. 8 kr.

II.

Wenn der Bruch $\frac{1}{32}$ durch fortgesetztes Dupliren zu der Zahl 256 erwachsen soll, wie oft muß duplirt werden?

Auflösung.

$256 = \frac{1}{32} \times 2^{x-1}$

$\times 32 \qquad 32 \times 256 = 2^{x-1}$

Logarith. $l\,32 + l\,256 = (x-1)\,l\,2$

$$\frac{l\,32 + l\,256}{l\,2} = x - 1$$

$$l\,32 = 1.5051500$$
$$l\,256 = 2.4082400$$

3.9133900	13
0,3010300	

90309
30103
90309

0

$$\text{also } 13 = x - 1$$
$$+1 \quad +1$$
$$14 = x$$

Antw. 14mal.

III.

Baiern hält bekanntlich 682 Quadratmeilen. Wie oft müßte man diese Zahl dupliren, bis endlich der Inhalt der ganzen Erdoberfläche herauskömmt, welcher über 9 Millionen Quadratmeilen beträgt?

Auflösung.

In diesem Beyspiele ist $v = 9000000$
$a = 682$
$q = 2$
$n = x$

Ferner $v = aq^{n-1}$

$: a \quad \frac{v}{a} = q^{n-1}$

loga-

logarithmisirt $lv - la = (n - 1)\, lq$

$: lq \qquad \frac{lv - la}{lq} = n - 1$

vers. $\qquad \frac{lv - la}{lq} + 1 = n$

$l\, 9000000 = 6{.}9542425$
$l\, 682 \quad = 2{.}8337844$

	4.1204581	13,6 . . .
l 2	0.3010300	+ 1
	11101581	14,6 . . .
	3010300	
	9030900	
	2070681	
	30103	

folglich nicht gar 15mal.

26. Zur Uebung.

I.

Ein Diener verlangt von seinem Herrn nicht mehr, als für das erste Monat einen Pfenning; aber mit dem Beding, daß er ihm diesen Gehalt alle Monat mit 3 multipliciren möchte. Das letzte Monat als er abgedankt wurde, machte sein Lohn 2551 fl. 50 kr. 1 pf., wie viele Monate hat er gedient?

II.

Jemand möchte gerne die Zahl 56 fünfmal nacheinander durch den nämlichen Faktor multipli-

tipliciren, so daß am Ende das Produkt 134456 heraus kömmt, was muß er für einen Faktor wählen?

III.

Wenn 1 hl. durch fortgesetztes Dupliren zu einer Summe von 546 fl. 8 kr. anwachsen soll, wie oft muß es geschehen?

27. In jeder abgebrochenen Reihe geometrischer Art verhält sich die Summe aller Glieder weniger dem letzten zur Summe aller Glieder weniger dem ersten, wie das erste zum zweyten. Denn $aq + aq^2 + \ldots aq^{n-1}$ stellt eine Reihe vor, wo das erste Glied mangelt, und $a + aq + \ldots aq^{n-2}$, wo das letzte fehlt. Nun ist in der Proportion $(a + aq + \ldots aq^{n-2}) : (aq + aq^2 + \ldots aq^{n-1}) = a : aq$ das Produkt der äußern Glieder gleich dem Produkte der mittleren, nämlich überall $a^2q + a^2q^2 + \ldots a^2q^{n-1}$; also ist der Satz vollkommen erwiesen.

28. Allgemein läßt sich diese Eigenschaft so ausdrücken:

$$(S - v) : (S - a) = a : aq.$$

29. Durch Hilfe dieser Eigenschaft ist man nun in Stand gesetzt eine Formel für die Summe jeder geometrischen Reihe zu finden, denn da

$$(S - v) : (S - a) = a : aq$$

so ist auch $\quad aqS - aqv = aS - a^2$

: a $\quad qS - qv = S - a$

verſ. $qS - S = qv - a$

oder $(q-1)S = qv - a$

$:(q-1)$ $S = \frac{qv - a}{q - 1}$.

30. Anwendung.

Zu einem Krönungsfeste werden allerley Thiere für die Küche angeschaft: als Krebſen, Lerchen, Tauben, Gänſe, Lämmer, Kälber, Wildſchweine und Ochſen. Jedes dieſer Thiere koſtet viermal mehr als das andere, und nimmt man von jeder Gattung 1 Stück, ſo kommen ſelbe auf 136 fl. 31 kr. 3 pf. 1 hl. Was koſtet jedes?

Auflöſung.

Hier iſt $q = 4$

$S = 136$ fl. 31 kr. 3 pf. 1 hl. $= 65535$ hl.

$n = 8$

$a = x$

und $v = y$, folglich in beyden Gleichungen

$v = aq^{n-1}$ und $\frac{qv - a}{q - 1}$ ſubſtituirt, giebt:

I.

$y = x \times 4^7$

$y = 16384\,x$

II.

$65535 = \frac{4y - x}{3}$

$196605 = 4y - x$

$\frac{196605 + x}{4} = y.$

III.

$$16384x = \frac{196605 + x}{4}$$

$$65536x = 196605 + x$$

$$-x \qquad\qquad -x$$

$$65536x = 196605$$

$$:65536 \qquad x = 3 \text{ hl.}$$

Folglich kam ein Krebs auf				3 hl.
Eine Lerch auf		1 kr.	2 pf.	
— Taube		6 —		
— Gans		24 —		
— Lamm	1 fl.	36 —		
— Kalb	6 :	24 —		
— Wildschwein	25 :	36 —		
— Ochs	102 :	24 —		
Summa	136 fl.	31 kr.	3 pf.	1 hl.

31. Zur Uebung.

Zur Bezahlung einer Kontribution von 8 Millionen Gulden schoß der Fürst aus seiner eignen Kasse 222223 fl. dar. Um das Uebrige aufzutreiben, theilte er seinen Staat in 7 Klassen, wovon jeder 10mal mehr als die andere zahlen mußte. Das Armeninstitut machte die erste Klasse, die Arbeitsleute die zweyte, die Dienerschaft die dritte, das Militär die vierte, die Bürgerschaft die fünfte, die Geistlichkeit die sechste und der Adel die siebende. Wie viel trift jede Klasse zu bezahlen?

Zum Beschlusse noch zwo mathetmatische Scheraden

I.

Ein Landmann wird von seinem mathematischen Freund aus der Stadt besucht. Als sie einst auf dem Felde spatzieren giengen, stieß ihnen eine Fruchtart auf, die der Städter nicht kannte. Auf die Frage, wie man diese Frucht nennt, erhielt er folgende Antwort: Ich gebe Ihnen 4 Zahlen, wenn Sie dieselben deutsch aussprechen, und von jeder Zahl den Anfangsbuchstaben nehmen, so haben Sie die Benennung dieser Getreidart.

Die erste Zahl giebt die Summe einer arithmetischen Progreßion von 9 Gliedern, wovon das erste $\frac{1}{2}$ und das letzte $1\frac{1}{18}$ ist.

Die zweyte Zahl stellt sowohl das erste Glied als die Differenz einer arithmetischen Reihe vor, wo die Gliederanzahl und das letzte Glied gleiche Größen sind.

Die dritte Zahl stellt sowohl die Differenz als die Gliederanzahl einer andern arithmetischen Reihe vor, deren erstes Glied 28 und das letzte 100 ist.

Die vierte Zahl endlich ist das erste Glied einer stättigen geometrischen Proportion, wo die Summe der drey Glieder 35 und ihr Produkt 1000 ist.

Gegenstück.

Der mathematische Landmann besuchte bald darauf seinen Freund in der Stadt, und erblickte in dessen Hause ein Thier, das er nicht taufen konnte. Auf seine Frage folgte die Antwort: Des Thieres Name besteht gleichfalls aus Anfangsbuchstaben deutscher Zahlwörter, wie deine Getreidart neulich. Die Zahlen geb ich dir der Ordnung nach so an:

Wenn man das Quadrat der ersten Zahl um eins kleiner macht, und durch 9 dividirt, so wird auch der Quotus um eins kleiner als diese Zahl erscheinen.

Addirt man die zwote Zahl zu 2475, so ist die Quadratwurzel aus der Summe 10mal größer als sie selbst.

Multiplicirt man den Kubus der dritten Zahl durch ihre Hälfte und subtrahirt vom Produkte $12\frac{1}{2}$, so ist das Produkt 12mal größer als das Quadrat dieser Zahl.

Die vierte Zahl endlich hat die Eigenschaft, daß die Differenz zwischen ihren Kubus und ihrem Quadrate genau so groß ist, als die Differenz zwischen dem Quadrat und der Wurzel dieser Zahl. Was war dieß für ein Wunderthier?

Resultate
der berechneten Beyspiele, die zur Uebung in diesem Werkchen vorgelegt worden.

Seite 11.

I. Geordnete Reihen.

1) $12a - 18b^2 - 5d^5 + 2f - 7q + 3z.$

2) $19b - a - d^2 + 3g^3 - 5g^2 + 7z^4 + 5.$

3) $c^2 - 7a - 8b^2 + 3d + k^4 + z^3 - z^2.$

II. Abgekürzte Reihen.

1) $a + 4d^2 + 14d + 3z.$

2) $2q - 11h - z^2 - z - 2.$

3) $x^2 - 4d - 3m^3 - 5x - 4.$

Seite 15.

Summen.

I.

$8b - a - 5d^2 + 4h + k - m - 2n^3 - 26x + 12z - 1.$

II.

$b + 5c - 9d + 8f^3 - 5g^3 - 3g^3 + 2g - 6m - y^3 - y^2 + 15.$

Seite 18.

Reste.

I.

$7a + 12d + 3f^2 - 6h - 3k^5 - 11n + r - 6y^2 + 2z + 5.$

II.

$2a^3 - 19b^2 + c + d^2 + 9m^2 - 3x^4 - 9y - 9z^3 - 9z^2 + 19.$

Seite 22.

Produkte.

I.

$20b^3 m^2 + 12 m^6 - 24m^2 vy^3 + 8m^2.$

II.

$3y^6 - 12y^5 z - 16y^4 z^2 + 10y^3 z^3 + 2y^2 z^4 - 2yz^5 + z^6.$

Seite 26.

Quotusse.

I.

$a - 3x.$

II.

$1 - d^2 - 2d.$

III.

$6d^2 m^2 + 12dm^2 + 24m^2 - 24n^4.$

Seite 30.

Verkleinerte Brüche.

I. $\frac{7a}{8m}$. II. $\frac{f}{3}$. III. $\frac{4x}{9y}$. IV. $\frac{d}{8z^2}$.

V. $\frac{a - x}{a^3 + 5}$ VI. $\frac{4m^2 + y - 4z}{20mz^4 + 2}$.

Seite 31.

Brüche in Unterabtheilungsbenennungen ausgedrückt.

Der Zentnerbruch giebt in Pfunden $\frac{125m}{a}$, der Jahrbruch hält $\frac{3a^2-9c}{2d}$ in Monaten, und der Joucherthbruch beträgt $\frac{18000c+148000}{z-4y}$ in Quadratschuhen.

Seite 33.

Addirte Buchstabenbrüche.

I. $\frac{2g+8m}{7h}$. II. $\frac{2x+12}{d-1}$.

III. $\frac{30am+2bd^2}{3bm}$.

IV. $\frac{9cyz+2dfhz+7fhy}{fhyz}$.

V. $\frac{2a^3d^2+4a^3m^3-6d^2f-12fm^3+54km-27k}{18d^2k+36km^3}$

VI. $\frac{10nv-2cd^2-5nz+cd^2z+32b^3h-4hxy+8xy}{8hv-16v-4hz+8z}$.

VII. $\frac{2c+35a^2d-1}{7d}$.

Seite 36.

Subtrahirte Brüche.

$$\text{I. } \frac{8az - 77f^3m^2}{11m^2z}.$$

$$\text{II. } \frac{2ax + ad^2 - 12bx - 6bd^2 - 6m^3 - 3gm - 6m^2 - 3g}{am - 6bm + a - 6b}.$$

$$\text{III. } \frac{4m - 7 - 4m^5 + 7m^4 - a - b}{1 - m^4}.$$

Seite 37.

Multiplicirte Brüche.

$$\text{I. } \frac{12cm - 6m}{35d^4}.$$

$$\text{II. } \frac{8ax - 8cx + 56xy^2 - az^3 + cz^4 - 7y^2z^3}{4m^2z - 12n^2z + 6m^2 - 18n^2}.$$

Seite 38.

Dividirte Brüche.

$$\text{I. } \frac{5dm}{7xz^2}.$$

$$\text{II. } \frac{m + 9x - 8my - 72xy}{30am - 18a^2m + 5ax - 3a^2x}.$$

$$\text{III. } \frac{b^3 - b}{6am + 3ay + 2m + y}.$$

Seite 50.

Seite 50.

Bearbeitete Gleichungen.

I. $x = 8$. II. $x = a - m$. III. $y = 5$.
IV. $z = d + c + 1$. V. $x = c - 3a + 7f + m + 5$.
VI. $y = \frac{8b - c}{10}$. VII. $z = \frac{6d}{a}$. VIII. $z = 8a - 4b$. IX. $x = 3cmn$. X. $x = 25$.
XI. $x = \frac{3a^2}{4f}$. XII. $z = \frac{a + m}{6}$. XIII. $x = \frac{5g - 1}{7}$. XIV. $y = \frac{a - 3m}{b - c + 1}$.
XV. $x = \frac{5d}{4a + 8d - 16}$.
XVI. $x = \frac{2a^2 + 3a - 3b^2 f - 5}{am - m - 21f}$.

Seite 56.

Arithmetische Proportionen.

I. 1 Uhr 25 Minuten Abends.
II. $74\frac{1}{2}$ Meilen.
III. 10 Eimer 58 Maaß.

Seite 58.

Arithmetische Mittelzahlen.

I. 315 Pfund.
II. $18384\frac{1}{2}$ Halbmesser der Erde.
III. $17\frac{5}{6}$ Schäffel.

Seite 61.

Geometrische Proportionen.	I. 8 fl. 41 kr. II. 5 Schuh 2 Zoll breit. III. 43 Zentner das Fuder Buchenholz, 38 Zentner das Ahornholz und 47 Zentner das eichene Holz, wenn die Brüche überall weggelassen werden.

Seite 65.

Regel Detri.	I. 25421 baierische Schuh. II. $865\frac{2}{3}$ fl. Reichsgeld. III. $192\frac{17}{24}$ Mark Goldes.

Seite 68.

Reesische Regel.	I. 27 Maurer. II. 4104 fl.

Seite 70.

Fortsetzung.	I. $2215\frac{55}{143}$ fl. II. $8\frac{7556}{11156}$ Stunden.

Seite 78.

Leichte algebraische Probleme.	I. 23 Jahre, bis sie noch so alt wird, und 11 Jahr, bis sie dreymal älter ist. II. $13127\frac{1}{2}$ fl. III. 40 Ellen zu $7\frac{1}{2}$ fl.

Allgemeine Formeln.

I.

Es sey der Werth eines Stück Geldes von der schlechtern Sorte $=$ w, von der bessern $=$ W. Es gehen ferne n Stück von schlechtern Sorte auf den Zentner, von der bessern N. Das Gewicht der ganzen Börse sey $=$ g, und die Summe S, so ist die Anzahl der Stücke von der schlechtern Gattung

$$x = \frac{n(gNW - S)}{NW - nw}.$$

II.

Es sey die zu verfertigende Arbeit $=$ a, die Tage der drey Schneidmühlen, in welchen sie die Produkte p, P und π fördern, heißen t, T uud τ, so ist

$$x = \frac{atT\tau}{t\tau p + t\tau P + \tau T\pi}.$$

Seite 100.

Probleme von mehr unbekannten Größen.

I. Der Eimer Mosler kostet 38 fl. und der Eimer Würzburger 14 fl.

II. 38 Dukaten und 46 Karoline.

III. Die Chaise kostet 200 fl., das Pferd 120 und der Huud 40 fl.

Seite 106.

Unbestimmte Probleme.

I.

12 Metzen Hirse und 16 Metzen Rollgerste.

II.

Entweder 69 Dukaten und 12 Karolinen, oder 36 Dukaten und 28 Karolinen, oder 3 Dukaten und 44 Karolinen.

Seite 108 n. 6.

Addition u. Subtraktion der Würden u. Wurzeln.

I. $19a^{n}$. II. $4\sqrt[n]{x^4}$. III. $7z^{\frac{1}{4}}$.
IV. $7\sqrt[n]{z^m}$.

Seite 108 n. 8.

Multiplikation der Würden.

I. $12c^4$. II. $18b^2$. III. $\frac{1}{4}a^{-3}$.
IV. $\frac{3}{10}x^{\frac{5}{9}}$. V. $15y^{\frac{ax+am}{mx}}$ oder
$15y^{\frac{a(m+x)}{mx}}$.

Seite 109.

Division der Würden.

I. $5m^2$. II. $\frac{8}{3}x^{2\frac{2}{3}6}$. III. y^{-2}.
IV. $\frac{2}{3}a^4$. V. $\frac{1}{2}z$. VI. $21b^{\frac{m^2-n}{mn}}$.

Seite 111 n. 17.

Ertheilung anderer Gestalten. I. $\frac{1}{a^2}$. II. $\frac{1}{3^m}$. III. $\frac{1}{x^3}$. IV. $a^{-2}b$. V. cxy^3. VI. $\frac{z^3}{x^2}$.

Seite 111 u. 20.

Erhebung der Würden zu neuen Würden. I. c^{21}. II. b^5y^{15}. III. $8z^3$. IV. c^6. V. $y^{\frac{6}{5}}$. VI. $a^{\frac{3}{2}}z^{\frac{1}{2}}$.

Seite 112.

Wegbringung der Wurzelzeichen. I. $y^{\frac{1}{2}}$. II. a. III. $y^{\frac{m+1}{m}}$. IV. $x^2b^{\frac{1}{r}}y^{\frac{n}{r}}$ VI. $z^{\frac{3}{4}}$.

Seite 113.

Würden mit gebrochnen Exponenten in Wurzelgrössen zu verändern. I. $\sqrt[3]{c}$. II. $\sqrt[9]{y^5}$. III. $b\sqrt[4]{z^3}$. IV. $\sqrt[m]{x^{n-1}}$.

Seite 114 n. 27.

Wurzeln aus Wurzeln zu ziehen I. $\sqrt[\frac{1}{12}]{b^5}$. II. $\sqrt[6]{z}$. $\sqrt[2mr]{a^4}$ IV. $\sqrt[\frac{3}{8}]{c^m}$.

Seite 114 n. 29.

Verkleinerung der Wurzelgrößen.

I. $\sqrt[3]{x}$. II. $\sqrt[\frac{1}{4}]{x^{\frac{1}{5}}}$. III. $\sqrt{z^{m}}$.
IV. $\sqrt[5]{x^{1-\frac{t}{3}}}$.

Seite 115 n. 31.

Wurzeln durch Wurzeln multipliciren und dividiren.

I. $20\sqrt[6]{a^{11}}$. II. $3\sqrt[3m]{b^{\frac{8m-9}{3m}}}$.
III. $\sqrt[n^2-n]{x^{2n^2+2n-2}}$. IV. $\sqrt[3mn]{y^{2n^2--9m^2}}$.

Seite 115 n. 33.

Faktores, die vor dem Wurzelzeichen stehen, hinter dasselbe zu bringen.

I. $\sqrt{9a}$. II. $\sqrt[3]{c^4d^6}$. III. $\sqrt[\frac{2}{3}]{x^{\frac{2n}{3}-1}y^{1}}$.
IV. $\sqrt[n-1]{a^{2n-2}b^{3n-3}x^{m+1}}$.

Seite 116.

Größen vor das Wurzelzeichen zu bringen.

I. $a^{\frac{1}{4}}\sqrt[4]{m}$. II. $4\sqrt[3]{\frac{27}{16}}$.

III. $2ab\sqrt[5]{\frac{y^3}{4a^3}}$.

IV. $y^{n}\sqrt[n-1]{x^2y^{2n-n^2-2}}$.

Seite 123.

Verwandlung gemeiner Brüche in Decimalen, und wechselsweise.	I. Ein Asper gilt 0,625 kr. ein Albes 1,2187 kr. und ein Rubel 1,818 fl. II. $1\frac{471}{2500}$ kölnische Pfunde, $44\frac{7}{8}$ baierische Pfunde, $2\frac{1}{4}$ Fuß, $949\frac{19}{25}$ Pfund, $1108\frac{1}{20}$ Pfund.

Seite 125.

Addition und Subtraktion in Decimalen.	I. 35,172. II. 40,49. III. 24,75.

Seite 126.

Multiplikation in Decimalen.	I. 151,03125. II. 0,00136.

Seite 128.

Division in De- cimalen.	I. 34,75. II. 13,35. III. 29,67.

Seite 135.

Rechnungen durch Logarithmen.	I. 6264. II. 355. III. 6341. IV. 18.

Seite 137.

Für Brüche und gemischte Zahlen die entspechenden Logarithmen zu finden.	I. — 0.0703424. II. 1.4186695. III. 2.0861862. IV. 1.5758803.

Seite 138.

Für Logarithmen Zahlen zu finden.	I. 5,7. II. 88.9 II. 1,086.

Seite 145.

Wenn die Tafeln zum Aufschlagen zu klein sind.	I. 5.9247578, 6.9698351, 6.4256290. II. 41970,5, 766700, 1995283. III. 8867,46, 4867,3.

Seite 148.

Logarithmische Gleichungen.	I. Beynahe zur 8ten Würde. II. Die Quadratwurzel. III. 1) 3,005. 2) 175,6. 3) Logarithmisch kann hier nicht mehr herausgebracht werden als 16935070000; in der That giebt es aber 16935077808,302867 . . .

Seite 153.

Logarithmische Probleme.
- I. 123837 Klafter.
- II. 6300 fl. Kapital.
- III. Nach 48 Jahren.

Seite 157.

Erhebung zweytheiliger Größen zu mancherley Würden.

I. $x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^2 + 5xy^4 + y^5$.

II. $a^4 - 8a^3b + 24a^2b^2 - 32ab^3 + 16b^4$.

III. $x^n + nx^{n-1}dx + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}(dx)^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{2 \times 3}x^{n-3}(dx)^3$.

IV. $a^3 - 3a^2m + 3am^2 - m^3 + 3a^2v^2$ $6amv^2 + 3a^2v^2 - 6amv^2 + 3m^2v^2 + v^3$.

V. $\sqrt{a}\sqrt{x} - \frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{a^3}} - \frac{3\sqrt{x^3}}{8\sqrt{a^5}} \ldots$

Seite 160.

Erhebung mehrgliedrichter Grössen zum Quadrate.

Das Quadrat ist: $25b^2 - 10bc^3 + 90bfm + 60bk + 20bx + c^6 - 18c^3mf - 12c^3k - 4c^3x + 81f^2m^2 + 108fkm + 36fmx + 36k^2 + 24kx + 4x^2$. Die Wurzel hingegen: $2d^2 - 8m^3x - y^5 + 9z$.

Seite 168.

Ausziehung der Quadratwurzel.	I. 4000. II. 7569. III. 1,96. IV. 0,03. V. 8,66 .. VI. 0,346 ... VII. 0,8165.

Seite 171.

Auflösung quadratischer Probleme.	I. Es waren 448 Arme, und Einer bekam 56 kr.
	II. 360 Bücher.
	III. 7 und 63.

Seite 176.

Auflösung unreiner quadratischer Gleichungen.	I. 67 Jahre.
	II. 11 Jahre.
	III. Die Kapitale sind $7416\frac{2}{3}$ und $7116\frac{2}{3}$; die Procente hingegen $3\frac{1}{2}$ und 4 fl.

Seite 186.

Ausziehung der Kubikwurzel.	I. 64. II. 1024. III. 3600. IV. 0,22. V. 3,85. VI. 21,35. VII. $\frac{3}{57}$. VIII. 0,84.

Seite 188 und 189.

Kubische Probleme.	I. 9 Soldaten.
	II. Im Jahr 1520.

Seite 192.

Fortsetzung.	23.

Seite 196.

Von zusammengesetzten Proportionen.	$9516\frac{52}{153}$ fl. Kapital.

Seite 197.

Von Proportionen mit Würden oder Wurzeln.	I. 80,42 . . Pfund. II. Nicht gar 9 Terzen.

Seite 198.

Von umgekehrten Proportionen.	36 Stund.

Seite 201.

Von Proportionen die aus geraden u. verkehrten Verhältnissen zusammengesetzt sind.	I. 11 fl. 32 kr. nebst einen kleinen Bruch. II. 15,606 baierische Zolle.

Seite 205.

Gesellschaftsregel.	Der erste 25 M. 11891 Quadratschuh der zweyte 12 M. 25945 Q. der dritte 8 M. 17297 der vierte 5 M. 24865.

Seite 208.

Arithmetische Progreßionen.	I. 5 Zoll. II. 321 Tag.

Seite 211.

Fortsetzuug.	I. 2156 Pflanzen. II. 26 Jahre.

Seite 214.

Fortsetzung.	I. Um 11 fl. und der letzte zahlt 118 fl. II. 25 Klafter.

Seite 217.

Reihen des zweyten Rangs.	216 Kugeln.

Seite 220.

Fortsetzung.	2684 Kugeln.

Seite 223.

Geometrische Progreßionen.	I. 13 Monate. II. Den Faktor 7. III. 19mal.

Seite 226.

Fortsetzung. Das Armeninstitut trift 7 fl. Die Arbeitsleute 70, die Dienerschaft 700, das Militär 7000, die Bürgerschaft 70000, die Geistlichkeit 700000, und der Adel 7000000.

Seite 227.

Scheraden. Die Auflösung der ersten giebt die Zahlen 7, 1, 9, 5. Daher ist Senf die Getreidart.

Die der zweyten: 8, 5, 5, 1. Das Thier war also ein Affe.

Verbesserungen.

Seite	Linie	statt	lies
17	14	$+ 7x$	$- 7x$.
26	3 von unten	$- 6dx$	$+ 6dx$.
—	2 von unten	$+ 2d^3$	$- 2d^3$.
—	1 von unten	$- 192m^6$	$+ 192m^4 - 192m^6$.
32	9	$- 4$	$+ 4$.
—	1 von unten	$\frac{n}{4^a}$	$\frac{n}{4}$.
132	13	$l(b)a = lab + lb$	$l(ab) = la + lb$.

$\frac{1}{3}+\frac{2}{3}=$

p

BSB Bayerische StaatsBibliothek
MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Prändel, Johann Georg,

Joh. Georg Prändel öffentlichen Lehrers der Physik und Mathematik auf dem churfürstl. Lyceum zu Amberg Algebra in's Kurze gefaßt und mit möglichster Deutlichkeit zum Selbstunterrichte vorgetragen

München 1800

Math.p. 435
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10082603-5
VD18 15308405